UNIVERSIDAD AUTÓNOMA CHAPINGO

PREPARATORIA AGRÍCOLA

ÁREA DE MATEMÁTICAS

CÁLCUL0 UNIVARIADO Y ÁLGEBRA LINEAL

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$$

$$Ax = b$$

AUTOR

Víctor Rafael Valdovinos Chávez

Primavera de 2012

AUTOR

Víctor Rafael Valdovinos Chávez

Diseño de portada: María Yenni Gayosso López

Diseño de interiores: Víctor Rafael Valdovinos Chávez

Primera edición en español: Abril de 2012

ISBN: 978-607-12-0248-2

km 38.5 carretera México-Texcoco

Chapingo, Texcoco, Estado de México, CP 56230

Tel: 01(595) 95 21500 ext. 5142

Impreso en México

DIRECTORIO

DR. CARLOS ALBERTO VILLASEÑOR PEREA

RECTOR

DR. RAMÓN VALDIVIA ALCALÁ

DIRECTOR GENERAL ACADÉMICO

DR. J. REYES ALTAMIRANO CÁRDENAS

DIRECTOR GENERAL DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ING. J. GUADALUPE GAYTÁN RUELAS

DIRECTOR GENERAL DE ADMINISTRACIÓN

M.C. DOMINGO MONTALVO HERNÁNDEZ

DIRECTOR GENERAL DE PATRONATO UNIVERSITARIO

BIOL. MARÍA DE LOURDES RODRÍGUEZ RAMÍREZ

DIRECTORA GENERAL DE DIFUSIÓN CULTURAL Y SERVICIO

LIC. ROCÍO GUZMÁN BENÍTEZ

JEFA DEL DEPARTAMENTO DE PUBLICACIONES

AGRADECIMIENTOS

A mi *alma mater*, la Universidad Autónoma Chapingo (UACh), por las espléndidas facilidades que me ha otorgado, primero para mi formación profesional y luego para trabajar en la docencia y la investigación.

Al Dr. Ramón Valdivia Alcalá, Director General Académico de la UACh, por el aliento moral y el apoyo económico para publicar esta obra.

A los colegas revisores, por el tiempo dedicado a la revisión, por sus atinadas sugerencias y por honrarme con su amistad.

A mis alumnos de Propedéutico, Licenciatura y Posgrado, por sus observaciones, su atención y paciencia.

A mi esposa Rocío y nuestros hijos Erandi, Yunuen y Víctor, por su comprensión y su generoso apoyo.

A las desafiantes e inagotables matemáticas, que se han convertido en la pasión de mi quehacer universitario.

CONTENIDO

ÁLGEBRA LINEAL

PRÓLOGO GENERAL

La obra consta de tres “libros universitarios” y se ha escrito con la intención de abordar algunos temas esenciales de las matemáticas que se estudian en tres niveles de la enseñanza formal: *el bachillerato, la licenciatura y el posgrado*. De manera más específica, se trata de un breve repaso de los conceptos, métodos y aplicaciones de matemáticas para el Propedéutico de Preparatoria y las Licenciaturas y la Maestría de la DICEA.

En el libro de ***Preparatoria*** se incluyen temas del *Cálculo de una Variable y el Álgebra Lineal*: álgebra de *R*, funciones, límites, derivadas, aplicaciones de la derivada, primitivas, métodos de integración, integral definida, aplicaciones de la integral, álgebra matricial, determinantes, solución de sistemas lineales, uso de matrices y espacios vectoriales.

En el libro de ***Licenciatura*** se abordan temas del *Cálculo Multivariado, las Ecuaciones Diferenciales y las Ecuaciones en Diferencias*: funciones, límites, derivadas parciales, óptimos libres y restringidos, integrales iteradas, ecuaciones diferenciales lineales (*EDL*) de primer orden, *EDL* de segundo orden, *ED* no lineales, inducción matemática, sucesiones y series, aproximación polinómica, series de potencias, ecuaciones en diferencias (*E en D*) de primer orden y *E en D* de segundo orden.

Y en el libro de ***Maestría*** se incluyen temas de *Cálculo de Variaciones y Control Óptimo*: convexidad, problema básico del cálculo de variaciones, condiciones necesarias, diferentes tipos de condiciones finales, condiciones suficientes, problema básico de control óptimo, principio del máximo, condiciones suficientes, diferentes tipos de condiciones finales, programación dinámica y aplicaciones.

Para cada tema hay ejemplos resueltos y varios ejercicios sugeridos. Se puso especial cuidado en *seis* aspectos fundamentales de las matemáticas: los ***conceptos***, los ***métodos*** (de solución), las ***aplicaciones***, la ***notación***, la ***secuencia*** y el nivel de ***complejidad***. Se incluye también una bibliografía mínima. Por supuesto, el único responsable de posibles errores y deficiencias es el autor, y son bienvenidas todas las sugerencias que permitan su mejora. Ojalá su estudio resulte agradable y útil.

Víctor Valdovinos

CÁLCULO UNIVARIADO

La Matemática… un punto de apoyo para mover el mundo.
El Cálculo… la matemática del cambio.
- Anónimo

1. TEMAS DE ÁLGEBRA

<u>*Definición*</u>. La *Matemática* es una ciencia hipotético-deductiva que estudia las propiedades y relaciones de las magnitudes y formas.

Naturaleza de la matemática. En esencia, la matemática es una ciencia *hipotético-deductiva*, porque a partir de un conjunto de *hipótesis* (proposiciones, leyes o axiomas) se *deducen* un conjunto de propiedades (teoremas), como se muestra en la figura 1.

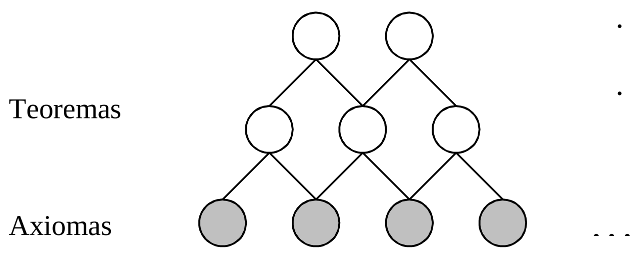


Figura 1

Elementos (componentes) en un sistema hipotético-deductivo: términos indefinidos, definiciones, *axiomas y teoremas*.

* Revisar las definiciones de *axioma y teorema*.

Sistemas de números

La matemática involucra varios sistemas de números (ver figura 2). Las funciones del cálculo elemental, son funciones definidas en los números reales.

Ubicación de los sistemas numéricos

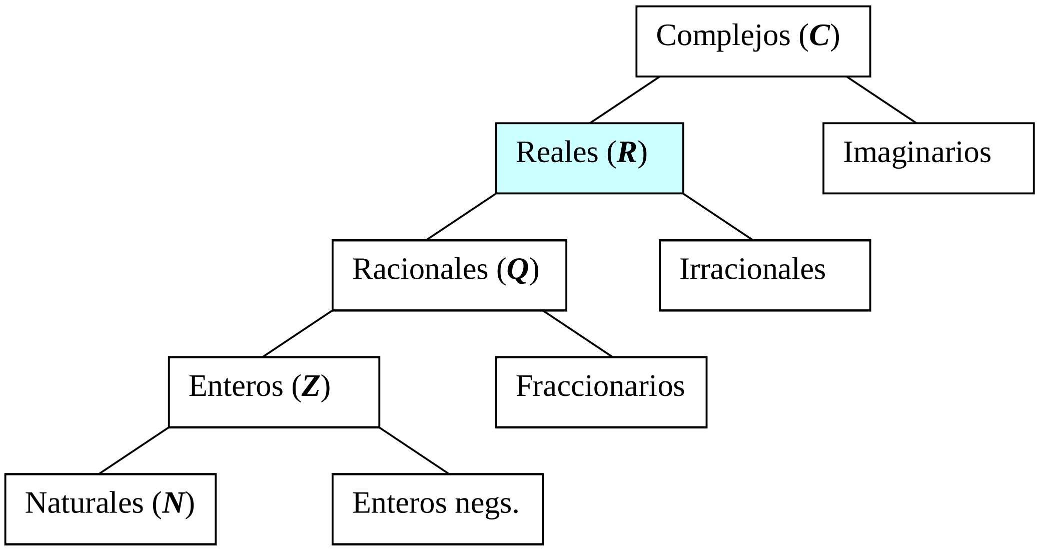


Figura 2

A partir de la figura 2, es claro que $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

1.1 El sistema de los Números Reales

Los números reales son un *sistema* formado por un conjunto de números (indefinidos), dos operaciones (suma y producto) y una relación de orden (menor que), que cumplen las leyes (axiomas) siguientes:

Para todo $a, b, c \in R$, se cumple

1. Ley de cerradura.
   $a + b \in R \;\; y \;\; ab \in R$

2. Ley conmutativa.

$a+b=b+a \;\; y \;\; ab=ba$

3. Ley asociativa.

$a+(b+c)=(a+b)+c \;\; y \;\; a(bc)=(ab)c$

4. Ley distributiva.

$a(b+c)=ab+ac$

5. Elementos neutros.

Existe el $0\in R$, tal que $a+0=a$

Existe el $1\in R$, tal que $a(1)=a$

6. Elementos inversos.

Para todo *a* existe $(-a)$, tal que $a+(-a)=0$

Para todo *a* existe a^{-1}, tal que $aa^{-1}=1, \; con \; a\neq 0$

7. Ley de tricotomía.

Sólo se verifica *una* de las relaciones siguientes:

$a=b, \; a<b \;\; o \;\; b<a$

8. Ley de transitividad.

$Si \;\; a<b \;\; y \;\; b<c \;\; entonces \;\; a<c$

9. Ley de adición.

$Si \;\; a<b \;\; entonces \;\; a+c<b+c$

10. Ley de multiplicación.

$Si \;\; a<b \;\; y \;\; c>0 \;\; entonces \;\; ac<bc$

11. Ley de completitud

Todo conjunto no vacío de números reales que tenga una cota superior tiene una *mínima* cota superior (supremo)

* Demostrar el teorema: $\forall a\in R, \; a\cdot 0=0$

1.2 Métodos de Factorización

1) Factor común.
2) Factorización por agrupación.
3) Diferencia de cuadrados.
4) Suma y resta de cubos.
5) Trinomio cuadrado perfecto.
6) Trinomio general.
   - tipo $x^2 + bx + c$
   - tipo $ax^2 + bx + c$

Ejercicios de factorización

1. $3x - x^2$
2. $(a-3)a - (a-3)3$
3. $x^3 - x^2 - x + 1$
4. $mn + 3m + 2n + 6$
5. $x^2 - 9y^2$
6. $3 - x^2$
7. $a^3 + 8$
8. $x^3 - 2$
9. $x^2 - 6x + 9$
10. $a^2 + 4ab + 4b^2$
11. $n^2 - n - 6$
12. $x^4 - 7x^2 + 12$
13. $3x^2 - 5x - 2$
14. $4m^2 + 23m - 6$

1.3 Fracciones Algebraicas

Signos en una fracción. Recordar que si se cambian dos cualesquiera de los tres signos de una fracción, la fracción no se altera.

Propiedad fundamental de las fracciones: si el numerador y el denominador de una fracción se multiplican o dividen por una expresión no nula, la fracción no se altera.

Simplificación de fracciones. Una fracción está en su mínima expresión (simplificada), si no tiene factores comunes en el numerador y el denominador.

Simplificar las fracciones siguientes:

1. $\dfrac{4x^2+7x-2}{1-16x^2}$ 2. $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^3-b^3}$

Operaciones con fracciones

a) *Multiplicación* y división de fracciones

1. $\dfrac{a^2-4}{2a^2-5a+2}\cdot\dfrac{2a-1}{a^3+8}$ 2. $\dfrac{a^3+2a^2-a-2}{a^2+3a+9}\div\dfrac{a^2+3a+2}{a^3-27}$

Múltiplo Común. Un múltiplo común de dos o más números es el número que es divisible entre esos números. El menor de los múltiplos que es exactamente divisible entre los números se denomina Mínimo Común Múltiplo

El Mínimo Común Denominador, es el menor múltiplo que es común a los denominadores.

b) *Suma* y resta de fracciones

1. $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{3x}{x+1}-\dfrac{4x^2}{x^2-1}$ 2. $\dfrac{m^2-1}{m^3+1}-\dfrac{2}{m^2-m+1}$

c) Fracciones *complejas*. Fracciones de fracciones

1. $\dfrac{3-\dfrac{x-6}{x^2-6x+8}}{2+\dfrac{x+7}{x^2-2x-8}}$ 2. $\dfrac{x}{x-\dfrac{x}{2-\dfrac{1}{x}}}$

1.4 Ecuaciones Lineales

Antes de iniciar con el estudio de las ecuaciones lineales, es conveniente establecer algunas definiciones básicas:

Igualdad. El enunciado de que dos expresiones son iguales

Ecuación. Igualdad que se cumple para valores específicos de la(s) variable(es)

Identidad. Igualdad que se cumple para cualesquier valor de la(s) variable(es)

Ejemplos de ecuaciones

1. $x+1=3$
2. $x^2-3x=4$

Ejemplos de Identidades

1. $(x-1)^2 = x^2-2x+1$
2. $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}=\frac{2}{x(x-2)}$

Propiedad fundamental de las ecuaciones: si en *ambos lados* de una ecuación se suma o resta la misma expresión, la ecuación no se altera. Y tampoco se altera si ambos lados se multiplican o dividen por la misma expresión.

Ecuaciones lineales

Las ecuaciones más simples son las lineales. Una ecuación es lineal y en una variable si es de la forma $ax+b=0$, con $a\neq 0$

Resolver una ecuación implica determinar el conjunto de valores de la variable (conjunto solución) que la verifican. El conjunto solución de una ecuación lineal en una variable está formado por un solo valor.

Resolver las ecuaciones siguientes:

1. $4x+13=3(5x+20)+8$
2. $\frac{2x+7}{4}+\frac{x-5}{3}=\frac{x+1}{6}$

Problemas en palabras

Indicaciones para plantear y resolver problemas

1. Leer cuidadosamente el planteamiento hasta entender el problema.
2. Si es posible, hacer un diagrama en el que se identifiquen datos e incógnitas.

3. Expresar, mediante ecuaciones, las relaciones existentes entre las variables.
4. Resolver la(s) ecuación(es).
5. Verificar la solución.

Problemas

1. Se desea construir un corral para cabras, de forma rectangular, con 270 m de malla. Si el largo debe tener 15 m más que el ancho. ¿Qué dimensiones tendrá el corral?

Planteamiento: $2(x+15)+2x=270$

2. Si el costo por "banderazo" de un taxi es de $20, más 18 centavos por kilómetro recorrido. ¿Para cuántos kilómetros ajustan $38?

Planteamiento: $20+0.18x=38$

3. Un productor desea vender sus cabras en $800 c/u, incluyendo un impuesto de 6.1%. ¿Cuál es su ingreso neto por cada animal?

Planteamiento: $x=800-0.061x$

4. El pintor *A* puede pintar una casa en 8 días y el pintor *B* la puede pintar en 10 días. ¿En cuántos días la pintan si trabajan juntos?

Planteamiento: $\frac{x}{8}+\frac{x}{10}=1$

5. ¿Cuántos litros de alcohol al 96% se deben agregar a 2 litros de alcohol al 60% para tener una mezcla al 80%?

Planteamiento: $0.96x+0.60(2)=0.80(x+2)$

6. ¿Cuántos gramos de plata pura se deben mezclar con l8 gramos de plata con una pureza del 70% para tener una aleación al 90%?

Planteamiento: $1(x)+0.7(18)=0.9(x+18)$

7. Si dos trenes salen de la misma estación, con la misma dirección, en vías paralelas, y uno viaja a 80 km/h y el otro a 60, ¿en cuántas horas se habrán separado 144 km?

Planteamiento: $80t-60t=144$

La *gráfica* de una *ecuación lineal* en dos variables es una recta.

* Repasar las formas de la ecuación de una recta.

Sistemas de ecuaciones lineales en dos variables

$$\textit{Sistema}\begin{cases}\textit{Consistente}\begin{cases}\textit{independiente}\ (\textit{una solución})\\ \textit{dependiente}\ (\textit{con}\ \infty\ \textit{soluciones})\end{cases}\\ \textit{Inconsistente}\ (\text{sin}\ \textit{solución})\end{cases}$$

Métodos de solución de sistemas:

1. Método gráfico.
2. Eliminación (sumas y restas).
3. Sustitución.
4. Regla de Cramer.

Ejercicios

Hallar los valores (*x*, *y*) que verifican el sistema

1. $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+7y=3 \\ 4x-5y=25 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x-y=4 \\ 3x-y=2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$

Problemas (sistemas)

1. Se requieren 200 kg de fertilizante con 40% de *N*. Si los ingredientes disponibles contienen 30 y 60% de *N*, ¿con cuántos kg de c/u se hace la mezcla requerida?

Planteamiento: $x+y=200$; $0.3x+0.6y=0.4(200)$

2. Si un avión viaja a 800 km/h con el viento a favor y a 620 km/h con el viento en contra, hallar la velocidad del avión en aire tranquilo y la velocidad del viento

Planteamiento: $x+y=800$; $x-y=620$

1.5 Leyes de Exponentes

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \ a \neq 0$
3. $(ab)^n = a^n b^n$
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, \ b \neq 0$
5. $(a^m)^n = a^{mn}$
6. $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

Al aplicar las leyes de los exponentes, pueden resultar exponentes positivos, negativos, nulos o fraccionarios.

Simplificar, dejando el resultado sin exponentes negativos o nulos

1. $\dfrac{x^{-2} + y^{-2}}{(xy)^{-2}}$
2. $\left(\dfrac{x^0 y^{-3/5}}{x^2 y^{-4/5}}\right)^{-10}$

1.6 Ecuaciones Cuadráticas

Las cuadráticas son ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Su conjunto solución lo constituyen dos, uno o ningún valor real, dependiendo del signo que tenga el discriminante ($b^2 - 4ac$) en la fórmula general.

Métodos de solución:

1. Por factorización directa o completando un trinomio cuadrado perfecto.
2. Aplicando la fórmula general.
3. Trazando las gráficas.
4. Usando métodos numéricos.

* Deducir la fórmula general, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ejercicios

Hallar los valores de *x* que verifican cada ecuación

1. $x^2 - 4x + 3 = 0$
2. $2x^2 + 4x = 6$
3. $x^2 - 6x + 9 = 0$
4. $2x^2 - 3x + 2 = 0$

Problemas

1. Hallar dos números enteros impares consecutivos cuyo producto sea 143.

Planteamiento: $x(x+2) = 143$

2. Si un hombre puede hacer un trabajo en 9 horas menos que un muchacho y trabajando juntos lo hacen en 20 horas. ¿En cuánto tiempo lo hace cada uno?

Planteamiento: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-9} = \frac{1}{20}$

Ecuaciones en *forma cuadrática* y ecuaciones con *radicales*

Algunas ecuaciones que no son cuadráticas se pueden reducir a cuadráticas mediante una sustitución adecuada.

Los radicales se eliminan elevando a una potencia entera positiva. Se deben probar todas las raíces resultantes en la ecuación original para detectar raíces extrañas.

Ejercicios

Resolver las ecuaciones siguientes:

1. $x^4 - x^2 - 2 = 0$
2. $x - 4x^{1/2} + 3 = 0$
3. $\sqrt{5x+6} = x + 2$
4. $\sqrt{x+4} - \sqrt{2x+1} + 1 = 0$

Ecuación general de segundo grado en dos variables.

La gráfica de una *ecuación cuadrática* de la forma $y = ax^2 + bx + c$, *con* $a \neq 0$, es una parábola. Si $a > 0$ la parábola abre hacia arriba y si $a < 0$ abre hacia abajo.

Por ejemplo, las gráficas de las ecuaciones $y = x^2 - 2x + 2$, $y = x^2 - 2x + 1$ *y* $y = x^2 - 2x$ se muestran en la figura 3.

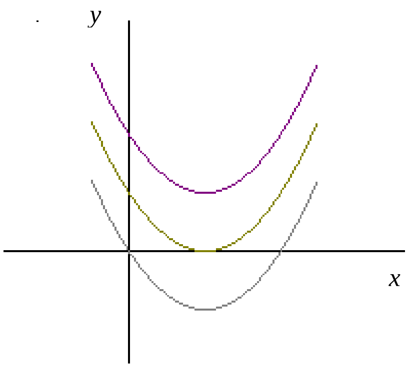


Figura 3

Sistemas que incluyen cuadráticas. Resolver:

1. $\begin{cases} y^2 - 3x = 0 \\ 4y - 3x = 3 \end{cases}$

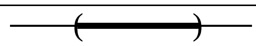
2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$

1.7 Desigualdades

* Recordar los axiomas de orden de *R* (7-10 de la página 12)

Resolver una desigualdad implica determinar el conjunto de valores reales que la verifican. En contraste con una ecuación, cuyo conjunto solución es finito, la solución de una desigualdad generalmente consta de uno o varios intervalos.

Tipos de intervalos

Conjunto	intervalo	gráfica
$\{x : a < x < b\}$	$(a,\, b)$	
$\{x : a \le x \le b\}$	$[a,\, b]$	
$\{x : a \le x < b\}$	$[a,\, b)$	
$\{x : x < b\}$	$(-\infty,\, b)$	

En general, el proceso de solución implica tres pasos:

1. Factorizar la desigualdad.

2. Determinar los *puntos de separación* (valores de la variable que hacen cero los factores).

3. Determinar el *signo* de la desigualdad en los intervalos definidos por los puntos de separación.

Desigualdades *polinomiales*: lineales, cuadráticas, cúbicas, etc.

1. $10x + 4 \ge 7x - 2$

2. $2 + 3x < 5x + 1 < 16$

3. $x^2 - 5x < 6$

3. $x^3 - x^2 - x + 1 > 0$

Desigualdades *Racionales*

1. $\dfrac{2x-3}{x+1} > 0$

2. $\dfrac{1}{3x-2} \le 4$

Desigualdades *con valor absoluto*

<u>*Definición*</u>. El valor absoluto de x se define como

$$|x| = \begin{cases} x, & si\ \ x \ge 0 \\ -x, & si\ \ x < 0 \end{cases}$$

En términos geométricos $|\ |$ representa una *distancia*. Así $|x| < 3$ significa que la distancia entre *x* y el origen es menor que 3, en tanto que $|x+1| > 2$ implica que la distancia entre *x* y –1 es mayor que 2. También es útil recordar que $\sqrt{x^2} = |x|$

Cinco ***propiedades*** del valor absoluto

1. $|ab| = |a||b|$
2. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $con\ b \neq 0$
3. $|a^n| = |a|^n$
4. $|a+b| \leq |a| + |b|$, (*desigualdad del triángulo*)
5. $|a-b| \geq |a| - |b|$

Tres ***Proposiciones*** para el valor absoluto

1. $|x| < a \iff -a < x < a$
2. $|x| > a \iff x < -a \ \ o \ \ x > a$
3. $|x| = a \iff x = \pm a$

Ejercicios. Resolver las desigualdades siguientes:

1. $|x+1| < 4$
2. $|2x-1| > 3$
3. $|-2x+1| \leq 4$
4. $\left|2 + \dfrac{5}{x}\right| > 1$

2. FUNCIONES

2.1 Concepto de Función

<u>*Definición*</u>. Una función es una *relación* entre los elementos de dos conjuntos llamados Dominio y Contradominio, a través de una *regla* que asocia *cada* elemento del Dominio con *uno solo* del Contradominio.

Ejemplos de relaciones

1. $x^2 + y^2 = 9$
2. $y^2 = 2x$

Ejemplos de funciones

1. $y = 3 - x^2$
2. $y = x^3 - 6x$

Clases (tipos) de funciones

Considérese el diagrama siguiente:

- *Funciones*
  - *Algebraicas*
    - *Polinomiales*
      - *Lineales*
        - *Constante*
        - *Identidad*
        - *Lineal general*
      - *Cuadráticas*
      - *Cúbicas*
      - *etc.*
    - *Racionales*
    - *Con raices*
    - *Especiales*
      - *Con valor absoluto*
      - *Múltiples*
  - *No algebraicas*
    - *Logarítmicas*
    - *Exponenciales*
    - *Trigonométricas*

En general se distinguen *dos* clases de funciones:

a) Las *algebraicas*, cuya regla está formada por sumas, productos o raíces de expresiones algebraicas.
b) Las *no algebraicas o trascendentes*, cuya regla incluye expresiones logarítmicas, exponenciales o trigonométricas.

2.2 Estudio de Funciones Típicas

Aunque el estudio de una función implica determinar varias propiedades, aquí sólo se insistirá en la *regla*, el *dominio* y la *gráfica*.

a) *Funciones algebraicas*

Funciones *polinomiales*. Funciones cuya regla es un polinomio.

1. $f(x) = -3$
2. $g(x) = 2x - 1$
3. $f(x) = 4x - x^2$
4. $g(x) = x^3 - 3x$

En general, una función polinomial tiene por *dominio natural* a los números reales.

Funciones *racionales*. Funciones que son el cociente de dos funciones polinomiales.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$
2. $g(x) = x + 4/x$

En general, el *dominio* de una función racional lo constituyen los valores de la variable que no hagan cero el denominador.

Funciones *con radicales*

1. $f(x) = \sqrt{x-2}$
2. $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

En general, el *dominio* de una función con radicales lo constituyen los valores de la variable que no hagan negativos los radicandos

Funciones *especiales*. Por ejemplo: funciones con valor absoluto y funciones múltiples (definidas por tramos).

1. $f(x) = |x-1|$

2. $g(x) = \begin{cases} -x, & si\ x < 0 \\ \sqrt{x-1}, & si\ x \geq 1 \end{cases}$

b) *Funciones no algebraicas*

Logaritmos

<u>Definición</u>. El logaritmo de un número (N) es el exponente (α) al que se debe elevar una base (b) para obtener el número (N), esto es,

$$\log_b N = \alpha \iff b^{\alpha} = N$$

La *base* debe ser un número positivo y diferente de 1

Ejemplos numéricos:

1. $\log_{10} 100 = 2,\ ya\ que\ 10^2 = 100$

2. $\log_2 8 = 3,\ ya\ que\ 2^3 = 8$

Tres ***propiedades***

1) $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$

2) $\log_b \dfrac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$

3) $\log_b N^p = p \cdot \log_b N$

Fórmula de transformación. En las calculadoras solo se consideran las bases 10 y *e*, porque el logaritmo en cualesquier otra base se puede calcular mediante la fórmula

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Funciones *logarítmicas*

1. $f(x) = \log_2(x)$ 2. $f(x) = \ln(x-1)$

Funciones *exponenciales*. Funciones cuya variable se ubica como exponente

1. $f(x) = 2^{3x}$ 2. $f(x) = e^{-x}$

Aplicación. De acuerdo a la fórmula del interés compuesto, $K_f = K_i(1+r)^t$ (donde r es la tasa de interés), si se invierten $1,000 al 6% anual, al cabo de 3 años se convierten en $1,191. ¿En cuánto tiempo se duplica esta inversión?

* Recordar los tipos de ángulos: sexagesimales, centesimales y *radianes*

<u>*Definición*</u>. Un *radián* es el ángulo central que subtiende un arco de longitud igual al radio.

Funciones *trigonométricas*

A partir de las relaciones entre los lados de un triángulo equilátero se definen seis funciones trigonométricas.

Graficar las funciones siguientes:

1. $f(x) = \cos(x)$ 2. $f(x) = tan(x)$

Componentes de una función trigonométrica: *amplitud, periodo y desplazamiento*.

* Revisar variaciones en las componentes con el paquete DERIVE.

2.3 Operaciones con Funciones

<u>*Definición*</u>. Si *f* y *g* son funciones de *x*, entonces

1) $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
2) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
3) $(f / g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)},\ \ con\ g(x) \neq 0$
4) $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

Ejercicios. Si $f(x)=x^2-x$ y $g(x)=3x+1$, determinar:

1. $(f-g)(x)$
2. $(g/f)(1)$
3. $(f\circ g)(x)$
4. $(g\circ f)(0)$

Inversa de una función

Si $y=x+3$, entonces $x=y-3$. Si en la última ecuación se intercambian las variables, se tendrá $y=x-3$. Por tanto, si $f(x)=x+3$ y $g(x)=x-3$, entonces *f* y *g* son funciones inversas entre sí, como también lo son:

$f(x)=2x$ y $g(x)=x/2$

$f(x)=x^3$ y $g(x)=\sqrt[3]{x}$

$f(x)=\ln(x)$ y $g(x)=e^x$

En todas ellas, la imagen del dominio de una es el dominio de la otra.

Funciones que tienen inversa. Una función tiene inversa si es uno a uno; es uno a uno si es estrictamente monótona; y es estrictamente monótona si su derivada es positiva o negativa, para toda *x* de su dominio.

Criterio para inversas:

f y *g* son inversas si $f[g(x)]=g[f(x)]=x$

Restricción de dominios.

Algunas funciones que no tienen inversa en su dominio natural, pueden tenerla en intervalos específicos. Por ejemplo, $g(x)=\sqrt{x}$ es la inversa de $f(x)=x^2$ en $x\geq 0$.

3. LÍMITES Y CONTINUIDAD

3.1 Límite de una Función

Considérese una cuerda que se desplaza de forma perpendicular a una directriz que pasa por el centro de una circunferencia, como se muestra en la figura 4.

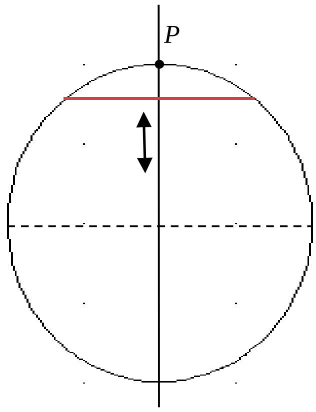


Figura 4

Si la cuerda se desplaza hacia arriba, tiende al *punto P* y si se desplaza hacia abajo, tiende al *diámetro* de la circunferencia.

Noción intuitiva de límite

Decir que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ significa, que si x está cerca pero difiere de c, entonces $f(x)$ está cerca de L, es decir, que si $x \to c \;\Rightarrow\; f(x) \to L$

Tabla de valores para $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2}$

Definición formal de límite

El $\lim_{x \to c} f(x) = L \;\Leftrightarrow\; \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0,$ *tal que,* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *siempre que* $0 < |x - c| < \delta$,

es decir, si $0 < |x - c| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon$

* Probar que $\lim_{x \to 3} (2x - 1) = 5$ y hacer la gráfica

* Hacer las gráficas para $\lim_{x\to 2} x^2$, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ y $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}$

* Revisar *límites laterales* con el programa DERIVE

***Propiedades** de los límites*

1. $\lim_{x\to c} k = k, \;\; k = constante$

2. $\lim_{x\to c} k\, f(x) = k \lim_{x\to c} f(x)$

3. $\lim_{x\to c} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x)$

4. $\lim_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$

5. $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}, \;\; con \;\; \lim_{x\to c} g(x) \neq 0$

3.2 Evaluación (Cálculo) de Límites

Estrategia para calcular límites

Considérese el diagrama siguiente:

$$\text{Si la } \textbf{\textit{sustitución directa}} \textit{ da}: \begin{cases} k \;\; \Rightarrow el\ límite\ es\ k \;\; (k = constante) \\ \frac{k}{0} \;\; \Rightarrow el\ límite\ no\ existe \\ \frac{0}{0} \;\; \Rightarrow probar\ con: \begin{cases} factorización \\ racionalización \\ desarrollo\ de\ productos \\ uso\ de\ límites\ especiales \end{cases} \\ \frac{\infty}{\infty} \;\; \Rightarrow dividir\ por\ la\ mayor\ potencia\ de\ la\ variable \end{cases}$$

Límites especiales

1. $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}=1$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0$

Ejercicios. Calcular los límites siguientes:

1. $\lim_{x\to 3}(2x-1)$
2. $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}$
3. $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}$
4. $\lim_{x\to 0}\frac{3x-3}{x^2-x}$
5. $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$
6. $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$
7. $\lim_{x\to 0}\frac{sen(3x)}{x}$
8. $\lim_{x\to \infty}\frac{x^2-3x+5}{3x^2+6x}$

Tres *tipos* de límites con ∞:

$$\begin{cases} \textit{límites } \infty \textit{ y asíntotas verticales} \\ \textit{límites al } \infty \textit{ y asíntotas horizontales} \\ \textit{límites } \infty \textit{ al } \infty \end{cases}$$

Ejercicios. Determinar asíntotas y esbozar las gráficas de las funciones siguientes:

1. $f(x)=\frac{1}{x+2}$
2. $g(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$
3. $f(x)=\frac{2x}{x+1}$
4. $g(x)=e^{-x}$
5. $f(x)=x^2$
6. $g(x)=\ln x$

3.3 Continuidad de una Función

Definición. La función $f(x)$ *es continua en* $x = c \Leftrightarrow \lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Ejercicios. Determinar si las funciones dadas son continuas en el punto indicado:

1. $f(x) = \sqrt{x-1},\ en\ x = 3$
2. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1},\ en\ x = 1$
3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}, & si\ x \neq 4 \\ 0, & si\ x = 4,\ en\ x = 4 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+1}{x+1}, & si\ x \neq -1 \\ 5, & si\ x = -1,\ en\ x = -1 \end{cases}$

4. DERIVADAS

4.1 Concepto de Derivada

Pendiente de una recta

Definición. La pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La derivada como *límite* de la pendiente de una secante

Considérese la figura 5

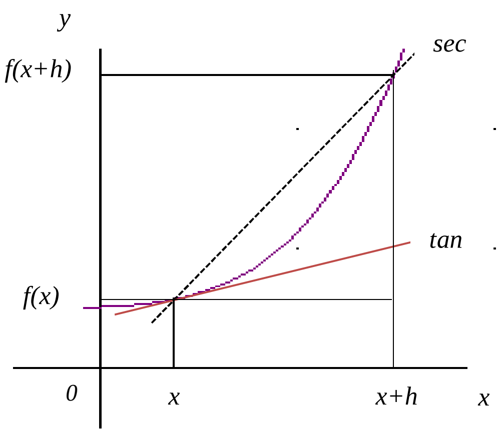


Figura 5

En la figura se aprecia que $m_{tan} = lim(m_{\sec})$

Definición. La derivada de una función $f(x)$, es también una función $f'(x)$, con regla de correspondencia $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Notación: $f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$

Cálculo de derivadas usando la *definición*

Ejercicios

Hallar, por definición, la derivada de las funciones siguientes:

1. $f(x) = 2 - 3x$
2. $g(x) = x^2 + 3x$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$
4. $g(x) = \sqrt{x}$

* Probar que $\dfrac{d}{dx}[sen(x)] = cos(x)$

En términos *geométricos*, la derivada es la pendiente de una curva en un punto (véase figura 6), en términos *físicos* es la velocidad de un móvil en un punto y en términos *generales*, es una razón (tasa) de cambio instantánea.

* Estudiar la derivada como velocidad en un punto.

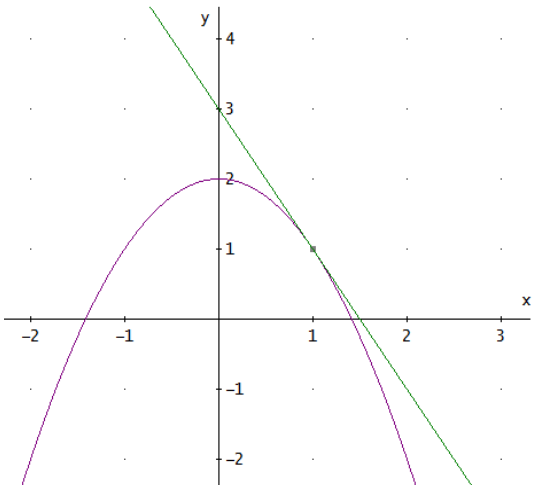


Figura 6

4.2 Reglas de Derivación *(regla de la cadena)*

Cálculo de derivadas usando *fórmulas*

A partir de la definición, se han obtenido un conjunto de *fórmulas* que permiten calcular, de manera directa, la derivada de cualquier función.

Derivar una función con fórmulas normalmente implica el uso de la regla de la cadena.

Regla de la cadena: *si* $y = f(u)$ *y* $u = f(x)$ *entonces* $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

Ejercicios. Derivar las funciones dadas

1. $f(x) = \left(\frac{x}{2}+1\right)^2$
2. $g(x) = x^2 e^{2x}$
3. $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$
4. $g(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$
5. $f(x) = \sqrt{2x-3}$
6. $g(x) = sen^2\sqrt{x}$
7. $f(x) = 3^{2x}$
8. $g(x) = (\ln x)^x$
9. $f(x) = tan^3\left(\frac{x}{3}\right)$
10. $g(x) = arc\,sen(e^x)$

Derivadas implícitas

Si la función no está expresada de manera explícita, se puede derivar término a término y luego despejar la derivada.

Ejercicios. Hallar $f'(x)$

1. $2x + y - 1 = 0$
2. $x^2 - xy + y^2 = 15$
3. $e^y = \cos(x+y)$
4. $y = (\ln x)^x$

4.3 Aplicaciones de la Derivada

a) *Ecuación de la tangente*

<u>*Definición*</u>. La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto (x_0, y_0) es $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Ejercicios. Hallar la ecuación de la tangente en los puntos indicados:

1. $f(x) = 6x - x^2,\ en\ x = 0\ \ y\ x = 1$
2. $g(x) = \dfrac{x}{x-1},\ en\ x = -1\ \ y\ x = 1$
3. $h(x) = \sqrt{x-1},\ en\ x = 0\ \ y\ x = 5$

b) *Regla de l´Hôpital*

<u>*Definición*</u>. Si $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = 0\ \ o\ \ \infty,\ \ entonces\ \ \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Ejercicios. Evaluar los límites siguientes:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(x)}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$
3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - x}{x^2+5}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(x) - x}{x^2}$

c) *Monotonía* (intervalos en los que una curva *crece o decrece*)

<u>*Definición*</u>. La función $f(x)$ es *creciente* en $x = c \Leftrightarrow f'(c) > 0$ y es *decreciente* $\Leftrightarrow f'(c) < 0$

Ejercicios. Determinar los intervalos en que las curvas son crecientes o decrecientes

1. $f(x) = 4x - x^2$
2. $g(x) = x^3 - 3x$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$
4. $g(x) = e^{-x}$

Puntos importantes en una función

$$Puntos \begin{cases} frontera\ (intervalo\ de\ definición) \\ Extremos \begin{cases} Máximos \begin{cases} globales \\ locales \end{cases} \\ Mínimos \begin{cases} globales \\ locales \end{cases} \end{cases} \\ de\ inflexión \end{cases}$$

d) Extremos (máximos o mínimos)

<u>*Definición*</u>. Si $f(x)$ tiene un *extremo* en $x = c$ entonces $f'(c) = 0$ *o no existe*

Ejercicios. Hallar los extremos de las funciones siguientes:

1. $f(x) = x^2 - 6x$
2. $g(x) = 3x - x^3$
3. $f(x) = \ln x$
4. $g(x) = x + 1/x$

e) *Concavidad*

<u>*Definición*</u>. $f(x)$ es *cóncava hacia arriba* (c. h. arr.) en $x = c \Leftrightarrow f''(c) > 0$ y es *cóncava hacia abajo* (c. h. ab.) $\Leftrightarrow f''(c) < 0$

Ejercicios. Determinar los intervalos de concavidad para las curvas siguientes:

1. $f(x) = 3 - x^2$
2. $g(x) = x + 4/x$
3. $f(x) = \sqrt{2 - x}$
4. $g(x) = 3x + 1$

f) *Puntos de inflexión*

<u>*Definición*</u>. Si $f(x)$ tiene un *punto de inflexión* en $x = c$ entonces $f''(c) = 0$ *o no existe*

Ejercicios. Hallar los puntos de inflexión para las curvas siguientes:

1. $f(x) = x^2 - 3$
2. $g(x) = x^3 - 3x$
3. $f(x) = x + 2/x$
4. $g(x) = x^{1/3}$

5. OTRAS APLICACIONES DE LA DERIVADA

5.1 Estudio de Curvas

El estudio de una curva comprende, al menos, los aspectos siguientes:

1. Dominio
2. Intersecciones con los ejes
3. Asíntotas
4. Monotonía
5. Extremos
6. Concavidad
7. Puntos de inflexión
8. Gráfica

Aspectos como la *simetría y la extensión general*, que se estudian en un curso de geometría analítica, normalmente no se analizan en un curso de propedéutico.

Ejercicios. Hacer el análisis de las curvas siguientes:

1. $f(x) = 2 - x$
2. $f(x) = x^2 - 6x$
3. $f(x) = 3x - x^3$
4. $f(x) = \ln(x-2)$
5. $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$
6. $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$
7. $f(x) = e^{-x}$
8. $*f(x) = \left|x^2 - 4x\right|$

* Analizar usando el programa DERIVE.

5.2 Problemas de Optimización

Indicaciones para plantear y resolver problemas de optimización

1. Leer cuidadosamente el planteamiento hasta entender el problema.

2. Si es posible, hacer un diagrama en el que se identifiquen datos e incógnitas.
3. Expresar, mediante ecuaciones, las relaciones existentes entre las variables.
4. Expresar la función a optimizar en términos de una sola variable.
5. Precisar el dominio de tal función y determinar el óptimo buscado.

a) *Ejemplos en geometría*

1. Si el *producto* de dos números positivos es 16, hallar los números cuya *suma* de uno con el cuadrado del otro sea *mínima*.
2. Determinar las coordenadas del punto de pendiente máxima en $f(x) = 6x^2 - x^3$
3. ¿Qué dimensiones debe tener un terreno rectangular de 32 hectáreas para que la cantidad de cerca sea mínima si uno de sus lados no la requiere (hay un barranco)?
4. Se desea construir una caja de base rectangular, sin tapa, a partir de una pieza de papel de 28 x 24 cm, recortando un cuadrado en las esquinas y doblando los lados. Hallar el valor del cuadrado recortado que dé el volumen máximo.

b) *Ejemplos en economía*

En un curso básico de Microeconomía se estudian funciones como las siguientes:

$p = f(x)$, función precio (demanda)

$C = f(x)$, función costo total

$\overline{c} = \dfrac{C}{x}$, función costo medio

$I = p \cdot x$, función ingreso total

$G = I - C$, función ganancia.

Las derivadas de estas funciones se denominan "*marginales*": precio marginal, ingreso marginal, ganancia marginal, etc.

Ejercicios

1. Si $p(x) = 5 - 0.02x \ y \ C(x) = 3 + 2x$, hallar el valor de *x* que da la ganancia máxima.

2. Dos *leyes* económicas:

   i) Si la ganancia es *máxima*, entonces $I'(x) = C'(x)$

   ii) Si el costo medio es *mínimo*, entonces $\overline{c}(x) = C'(x)$.

3. En un almacén se sabe que se pueden vender 1,000 u/semana de un producto si el precio/u es de 3 pesos y que las ventas subirán en 100 u por cada 10 centavos que baje el precio/u. Hallar el nivel de ventas que maximiza el ingreso.
4. En una empresa pesquera se sabe que una población base de *x* barriles de almejas produce anualmente $f(x) = 50x - \frac{x^2}{4}$ barriles de pesca. ¿Cuántos barriles se deben pescar cada año para tener la máxima pesca sostenible?

c) *Ejemplos en física*

Galileo encontró que la función de posición o ley de movimiento de todo objeto lanzado desde una altura conocida s_o, con una velocidad inicial v_o, está dada por

$$s(t) = -4.9t^2 + v_o t + s_o$$

De lo cual dedujo que la tierra atrae a los objetos cercanos a su superficie con una aceleración de $-9.8\ m/s^2$ $(32\ pies/s^2)$.

En general, si el *espacio recorrido* por un objeto a lo largo de una recta queda determinado por la función $s = f(t)$, su *velocidad* será $v = s' = f'(t)$ y su *aceleración* (la *velocidad* de la *velocidad*) $a = v' = s'' = f''(t)$.

Ejercicios

1. Determinar la aceleración si $s(t) = -4.9t^2 + v_o t + s_o$
2. Si la función de posición de un objeto lanzado desde el suelo, verticalmente hacia arriba, es $f(t) = 40t - 8t^2$, determinar:
   a) La posición y la velocidad cuando $t = 2$
   b) La altura máxima alcanzada.
   c) La velocidad con que el objeto pega al suelo.

3. Un pescador en bote de remos se encuentra a 2 km, mar adentro, del punto más cercano a una playa recta, y desea llegar a otro punto de la playa situado a 8 km del primero. Si rema a razón de 4 km/h y camina a 6 km/h, ¿qué trayectoria debe seguir para llegar a su objetivo en el *mínimo tiempo*?

5.3 Razones Relacionadas

Cuando dos o más cantidades, que son función de *t*, están relacionadas por una ecuación, la relación entre sus razones de cambio se obtiene derivando dicha ecuación.

1. Una piedra arrojada a un estanque produce ondas circulares concéntricas. Si el radio de la onda exterior crece a 30 cm/s cuando *r* mide 120 cm ¿a qué ritmo crece el área perturbada?
2. Si la distancia más corta entre una persona y una vía de tren es de 1 km y un tren avanza a 80 km/h, ¿qué tan rápido está cambiando la distancia entre la persona y la máquina cuando ésta se ha alejado 2 km de la distancia más corta?
3. Si el barco A navega hacia el Sur a 16 km/h y el barco B, situado a 32 km al Sur de A, navega hacia el Este a razón de 12 km/h, ¿a qué velocidad cambia la distancia entre ellos al cabo de una hora?
4. De un globo esférico escapa gas a razón de 6 m^3/mi, ¿a qué ritmo decrece su área cuando el radio es de 2 m?

5.4 La Diferencial

<u>*Definición*</u>. Si $y = f(x)$ es una función derivable y $dx = \Delta x$ representa un incremento de *x*, entonces $dy = f'(x)dx$

Observaciones:

1. A partir de la definición se observa que la derivada $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ se puede tomar como un cociente de diferenciales.

2. En términos geométricos (ver figura 7), dy es el incremento de y con respecto a la recta tangente.

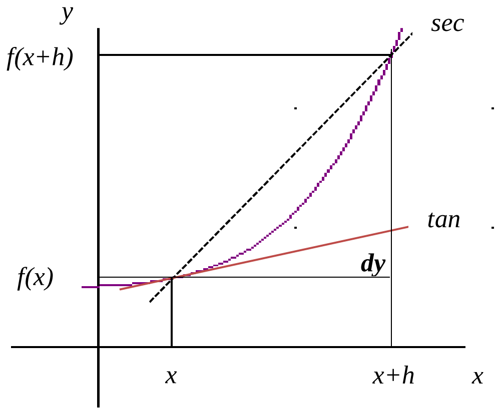


Figura 7

3. Si Δx es un valor "pequeño", entonces $\Delta y \approx dy$, es decir $f(x+\Delta x) - f(x) \approx dy$
4. A cada fórmula de derivación corresponde una fórmula de diferenciación.

Si u y v son funciones diferenciables de x, entonces:

$$d(cu) = cdu$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$d(uv) = udv + vdu$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

$$\vdots$$

Ejercicios. Hallar la diferencial de las funciones siguientes:

1. $f(x) = x^2 - 3x$
2. $g(x) = \dfrac{x}{2x-1}$
3. $f(x) = \sqrt{2x+5}$
4. $g(x) = \cos^3(x/3)$

Para las funciones siguientes calcular $\Delta y,\ dy\ \ y\ \ la\ \ diferencia\ \ \Delta y - dy$

1. $f(x) = 2x + 4$
2. $g(x) = 3x - x^2$

5.5 Aplicaciones de la Diferencial

La diferencial se puede utilizar para calcular, de manera aproximada:

1) Incrementos
2) Valores
3) Errores

1) *Incrementos.* Calcular el material de construcción de una pelota de tenis, cuyos radios interior y exterior miden 6 y 6.2 cm, respectivamente.

Volumen de una esfera $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Por tanto, $dV = 4\pi r^2 dr = 4\pi(6^2)(0.2)$

2) *Valores.* Calcular un valor aproximado para $\sqrt{16.3}$

Si $y = f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}$ y $dy = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$.

Así mismo, si $x = 16\ \ y\ \ \Delta x = 0.3$, entonces $\sqrt{x + \Delta x} = \sqrt{16 + 0.3}$

Pero como Δx es “pequeño”, entonces

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$, esto es,

$$\sqrt{16 + 0.3} \approx \sqrt{16} + \frac{0.3}{2\sqrt{16}} = 4.0375$$

Una calculadora da un valor de 4.0373

3) *Errores*. Si al medir una magnitud se comete un *error*, los cálculos que se realicen con dicha magnitud propagan el error.

<u>*Definición*</u> de error: *Error* = "valor real" – valor aproximado

Se distinguen *dos tipos de errores*:

a) *Error relativo* = error / valor "real"
b) *% de error* = error relativo por 100

Así, para el caso del segundo ejemplo:

- *Error* = 4.0373 – 4.0375 = – 0.0002
- *Error relativo* = – 0.0002 / 4.0373 = – 0.00005
- *% de error* = – 0.005 %

Ejemplo

Si un tonel cilíndrico mide "exactamente" 1 m de alto y se ha medido su diámetro en 60 ± 0.08 cm, calcular el volumen correspondiente con una estimación del error.

Si $V = \pi r^2 h = 100\pi r^2,\ con\ r = 30 \pm 0.04\ cm,$

entonces $dV = 200\pi r\, dr = 200\pi(30)(\pm 0.04) = \pm 754\ cm^3$

Así, $V = 282\ 743\ \pm 754\ cm^3$

6. LA INTEGRAL INDEFINIDA

6.1 Concepto de Primitiva

Definición. La función $F(x)$ es ***una*** integral indefinida (*primitiva o antiderivada*) de la función $f(x)$ *si* $F'(x) = f(x)$.

En notación matemática

$$\int f(x)dx = F(x) \ \ si \ \ F'(x) = f(x)$$

El símbolo $\int$ (una "*ese*" alargada) es el *operador* integral, $f(x)$ se denomina *integrando* y dx identifica a la x como *variable de integración*.

Ejemplos de primitivas:

1. $\int 2xdx = x^2, \ ya \ que, \ \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$
2. $\int 3x^2 dx = x^3, \ ya \ que \cdots$
3. $\int \cos(x)dx = sen(x) \cdots$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln(x) \cdots$
5. $\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2x^{3/2}}{3} \cdots$

Nótese que $\int 2xdx = x^2 = x^2 - 3 = x^2 + \sqrt{5} = \cdots = x^2 + c$, donde c es una constante. Lo cual implica que ***la*** primitiva $\int 2xdx = x^2 + c$ representa una *familia de curvas*: una curva diferente para cada valor de c.

6.2 Integrales Inmediatas

La mayoría de los ejercicios siguientes se pueden resolver utilizando (de manera implícita o explícita) el método de ***sustitución*** *o cambio de variable*.

<u>*Definición*</u>. Si $F(u)$ es una primitiva de $f(u)$ y $u=g(x)$, entonces

$$\int f(u)du = \int f[g(x)]g'(x)dx = F(u)+c$$

Ejercicios. Hallar las primitivas siguientes:

1. $\int dx$
2. $\int \frac{dx}{x^2}$
3. $\int \sqrt{x}\, dx$
4. $\int (1-x)\sqrt{x}\, dx$
5. $\int \frac{x^3+5x^2+3}{x^2} dx$
6. $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} dx$
7. $\int \frac{x^2 dx}{(x^3+1)^3}$
8. $\int \frac{4x dx}{\sqrt{x^2+3}}$
9. $\int \sqrt{x^2-2x^4}\, dx$
10. $\int \frac{dx}{3x+1}$
11. $\int \frac{x dx}{3-x^2}$
12. $\int \frac{x+2}{x-1} dx$
13. $\int e^{-x} dx$
14. $\int 3^{2x} dx$
15. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$
16. $\int \frac{dx}{e^x+1}$
17. $\int sen(4x)dx$
18. $\int cos(x/2)dx$
19. $\int sen^2(x)cos(x)dx$
20. $\int tan(x)dx$
21. $\int \frac{sen(x)+cos(x)}{cos(x)} dx$
22. $\int \frac{sen(x)}{cos^3(x)} dx$

23. $\int \frac{dx}{1+\cos(x)}$

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

25. $\int \frac{dx}{2+9x^2}$

26. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$

27. $\int \frac{t^3+4t^2+3t}{t^2+1}dt$

28. $\int \frac{dy}{y^2-4y+3}$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{11-10x-x^2}}$

30. $\int \frac{dx}{9x^2-16}$

31. $\int \frac{(1-x)dx}{4x^2+4x-3}$

32. $\int \sqrt{x^2-36}\,dx$

33. $\int \sqrt{x^2+2x-3}\,dx$

34. $\int \sqrt{6x-x^2}\,dx$

35. $\int \frac{\ln(x)}{x}dx$

36. $\int \frac{dx}{x\ln(x)}$

6.3 Aplicaciones de las Primitivas

1. Hallar $f(x)$ *si* $f''(x)=2x$ *y* $f(x)$ pasa por (1, −2) con una pendiente de −1
2. Si un auto frena a razón de 2 m/s^2, ¿qué espacio recorre antes de detenerse si su velocidad al aplicar el freno es de 21.6 km/h?
3. Una bola de hielo resbala por una pendiente de 60 m de longitud con una aceleración de 4 m/s^2 y llega a la planicie en 5 s ¿cuál era su velocidad inicial y su velocidad cuando está a 20 m de la planicie?
4. Si en 1975 la población mundial era de 4,000 millones y en el año 2015 será de aproximadamente 7,586 millones ¿cómo se obtuvo tal proyección?

   * Hipótesis básica: $\frac{\Delta P/\Delta t}{P}=k,\ donde\ k=1.6\%$

7. MÉTODOS (TÉCNICAS) DE INTEGRACIÓN

Si una primitiva existe, pero no se puede calcular con alguna de las fórmulas elementales de integración, se puede recurrir a un método de integración.

En un curso básico de cálculo se estudian tres métodos de integración: sustitución, por partes y por fracciones simples.

El método de integración más frecuente es el de *integración por sustitución,* que ya se utilizó en el cálculo de integrales inmediatas, el que le sigue en importancia es el de *integración por partes*.

7.1 Integración por Partes

Definición. Si u y v son funciones diferenciables de x, entonces la diferencial del producto uv es

$d(uv) = udv + vdu$

$udv = d(uv) - vdu$, despejando udv

$\int udv = uv - \int vdu$, integrando

Se denomina integración por partes, porque el integrando se separa en dos partes, u y dv, y es particularmente útil para integrandos que contienen productos.

Dos indicaciones para *identificar* las partes:

1. dv debe ser de “fácil” integración
2. $\int vdu$ no debe ser más complicada que $\int udv$

Ejercicios. Resolver usando integración por partes

1. $\int xe^x dx$
2. $\int \ln(x)dx$

3. $\int x\cos(x)dx$
4. $\int arc\,sen(x)dx$
5. $\int x\ln(x)dx$
6. $\int \cos^2(x)dx$
7. $\int x^2 sen(x)dx$
8. $\int 2x\sqrt{2x-3}\,dx$
9. $\int e^x \cos(x)dx$
10. $\int \sec^3(x)dx$

7.2 Integrales Trigonométricas

Para determinar integrales trigonométricas es necesario tener presente las *identidades trigonométricas* (recíprocas, cuadráticas, ángulo doble, etc.)

* Repasar las identidades trigonométricas

Ejercicios. Resolver las integrales siguientes:

1. $\int \cos^2(x)dx$
2. $\int sen^3(x)dx$
3. $\int sen^2(x)\cos^3 dx$
4. $\int \cos^3(x)sen^4(x)dx$
5. $\int sen^4(x)dx$
6. $\int sen^2(x)\cos^2(x)dx$
7. $\int \cot^4(x)dx$
8. $\int \frac{\sec(x)}{\tan^2(x)}dx$
9. $\int \sec^3(x)\tan(x)dx$
10. $\int \cot^3(x)\csc^3(x)dx$

7.3 Sustitución Trigonométrica

Un integrando que contenga alguno de los radicales siguientes:

$\sqrt{a^2-b^2u^2}$, $\sqrt{a^2+b^2u^2}$ o $\sqrt{b^2u^2-a^2}$

Se puede *transformar* en otro integrando que contenga expresiones de una nueva variable (sin radicales), mediante las sustituciones que se indican en la tabla siguiente:

Radical	Sustitución	Resultado
$\sqrt{a^2 - b^2u^2}$	$u = \frac{a}{b} sen(w)$	$a\, cos(w)$
$\sqrt{a^2 + b^2u^2}$	$u = \frac{a}{b} tan(w)$	$a\, sec(w)$
$\sqrt{b^2u^2 - a^2}$	$u = \frac{a}{b} sec(w)$	$a\, tan(w)$

Ejercicios. Resolver por sustitución trigonométrica

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}}$
4. $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}\,dx$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$
6. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$
7. $\int \frac{dx}{(x^2-4x)^{3/2}}$
8. $\int \sqrt{x^2-16}\,dx$

7.4 Integración por Fracciones Simples (Parciales)

Origen de las fracciones simples. Considérese la suma de fracciones siguiente:

$$\frac{2}{x-3} - \frac{1}{x^2+2} = \frac{2x^2+4-x+3}{(x^2+2)(x-3)} = \frac{2x^2-x+7}{x^3-3x^2+2x-6}$$

Lo cual implica que la última fracción se puede descomponer en las dos primeras.

Para descomponer, en fracciones simples, una fracción propia cuyo denominador es factorizable, se procede como se indica en los casos siguientes:

Caso 1. A cada *factor lineal* $(ax+b)$, que aparezca *n* veces en el denominador de una fracción propia, le corresponde una suma de *n* fracciones simples de la forma

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n},$$

donde las $A_i \in R$, son constantes a determinar.

Caso 2. A cada factor *cuadrático irreducible* (ax^2+bx+c), que aparezca *n* veces en el denominador de una fracción propia, le corresponde una suma de *n* fracciones simples de la forma

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n},$$

donde las A_i, $B_i \in R$, son constantes a determinar.

Ejemplos de descomposición de fracciones (casos 1 y 2)

1. $\dfrac{x}{x^2-9}=\dfrac{x}{(x+3)(x-3)}=\dfrac{A}{x+3}+\dfrac{B}{x-3}$

2. $\dfrac{3x-1}{x^3+8}=\dfrac{3x-1}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{Bx+C}{x^2-2x+4}$

3. $\dfrac{x^3+5x-2}{x^2(x^2+3)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+3}$

Ejercicios. Resolver por fracciones simples

1. $\displaystyle\int\frac{xdx}{x^2-1}$

2. $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^3-x^2}dx$

3. $\displaystyle\int\frac{x^2-x+2}{x^3+x}dx$

4. $\displaystyle\int\frac{(x+5)dx}{x^3-2x^2+3x-6}$

5. $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}dx$

6. $\int \frac{x^2-6x+3}{x^4+3x^2}dx$

7.5 Otras Sustituciones

a) Para integrandos con radicales de la forma $\sqrt{ax+b}$, usar la sustitución $u=\sqrt{ax+b}$

1. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1}$

2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$

b) Para integrandos con funciones racionales de seno y coseno, usar la sustitución

$$u=\tan\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{sen(x)}{1+\cos(x)}$$

Lo cual implica que $\cos(x)=\frac{1-u^2}{1+u^2}$, $sen(x)=\frac{2u}{1+u^2}$ y $dx=\frac{2\,du}{1+u^2}$

Deducción. Si $u=\frac{sen(x)}{1+\cos(x)}$, *entonces* $u^2=\frac{sen^2(x)}{[1+\cos(x)]^2}=\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}$, y de aquí se pueden despejar los valores indicados.

1. $\int \frac{dx}{1-sen(x)}$

2. $\int \frac{dx}{3+\cos(x)}$

7.6 Repaso de Métodos de Integración

Resolver por el método apropiado

1. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5-x^2}}$ y $\int \frac{dx}{x\sqrt{3-x}}$ *(Sustitución)*

2. $\int x^2\ln(x)dx$ *(Por partes)*

3. $\int sen^3(x)\cos^2(x)dx$ *(Trigonométrica)*

4. $\int \frac{dx}{(9-x^2)^{3/2}}$ *(Sustitución trigonométrica)*

5. $\int \frac{x-2}{x^4+x^2}dx$ *(Fracciones simples)*

7.7 Aplicación. Dinámica de Poblaciones

a) *Crecimiento con recursos libres*

Si los recursos son libres, el crecimiento de la población es proporcional a su tamaño.

Así, si $P = f(t)$ representa el tamaño de la población, en el tiempo *t*, entonces $\frac{dP}{dt} = kP$, es decir, $\frac{dP/dt}{P} = k$ y la ley de crecimiento es una curva exponencial, $P = P_0 e^{kt}$ (véase la figura 8).

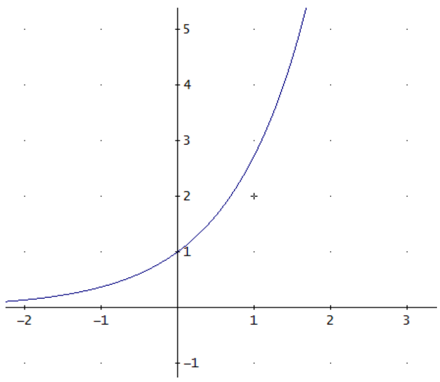


Figura 8

b) *Crecimiento con recursos limitados*

Si los recursos son limitados, el crecimiento de la población es proporcional a su tamaño y a la saturación relativa del medio (capacidad de carga disponible).

Esto es, $\dfrac{dP}{dt} = kP\left(\dfrac{Q-P}{Q}\right)$, donde Q = capacidad de carga, es decir, $\dfrac{dP/dt}{P} = k\left(1-\dfrac{P}{Q}\right)$ y la ley de crecimiento es una curva logística, $P = \dfrac{Q}{1+Ae^{-kt}}$ (véase la figura 9)

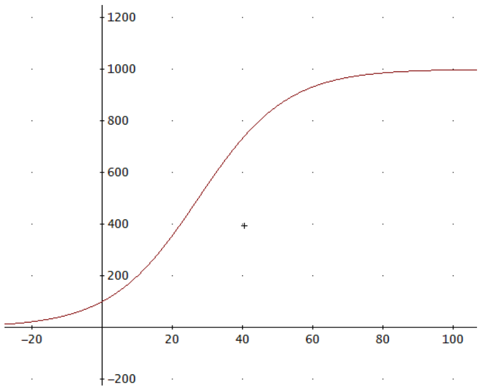


Figura 9

* Deducir la función logística integrando por fracciones simples

8. LA INTEGRAL DEFINIDA

8.1 Concepto de Integral Definida

Áreas de figuras simples

* Repasar el cálculo de áreas de figuras simples: rectángulo, paralelogramo, triángulo, polígono regular y círculo.

Área bajo una curva. Considérese la figura 10

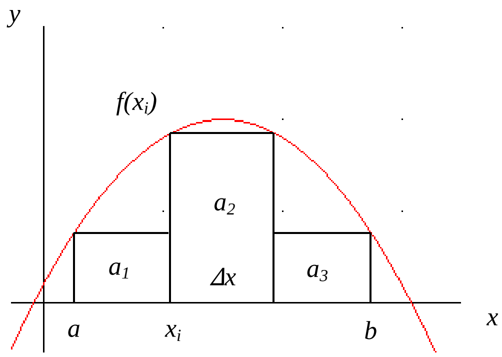


Figura 10

¿Cómo determinar el área de la región limitada por la curva $f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$?

Una forma posible es dividirla en rectángulos, obtener el área de c/u de ellos y luego sumar tales áreas.

Como el área de un *rectángulo genérico* de base Δx y altura $f(x_i)$ es $f(x_i)\Delta x$, si la región se divide, por ejemplo, en tres rectángulos y luego se duplica dicho número, de manera sucesiva, se tendría

$$A_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$A_6 = a_1 + a_2 + \cdots + a_6$$

$$\vdots$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$\vdots$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

A partir de la figura 11, considérese el área de la región limitada por la función $f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$

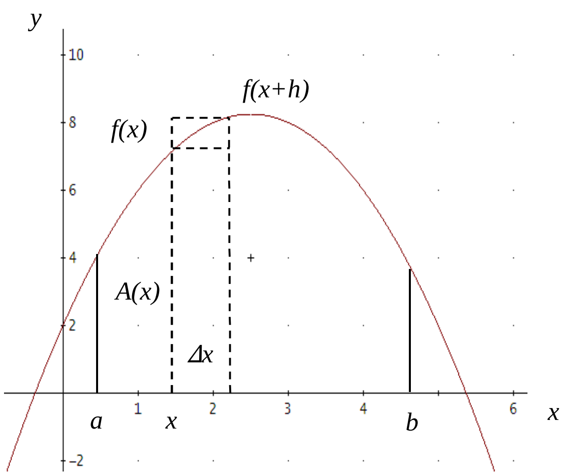


Figura 11

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y $A(x)$ es una función de área en $[a, x)$, entonces si x se incrementa en Δx el área también se incrementa en ΔA y se cumple la relación

$$f(x)\Delta x \;\leq\; \Delta A \;\leq\; f(x+\Delta x)\Delta x$$

$$f(x) \;\leq\; \frac{\Delta A}{\Delta x} \;\leq\; f(x+\Delta x)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x) \ \le\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta x} \ \le\ \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)$$

$$f(x) \ \le\ \frac{dA}{dx} \ \le\ f(x)$$

Por lo tanto

$$\frac{dA}{dx} = f(x) \ \ y \ \ dA = f(x)dx$$

$$A(x) = \int f(x)dx,\ i.e.,\ A(x) = F(x) + c$$

$$A(a) = F(a) + c$$

$$0 = F(a) + c,\ de\ donde,\ c = -F(a)$$

$$A(b) = F(b) + c = F(b) - F(a)$$

Y, finalmente

$$A(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

***8.2 Teorema Fundamental del Cálculo** (TFC)*

Teorema. Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

***Propiedades** de la integral definida*

1. $\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,$ k constante
2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,\ \ a < c < b$

4. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

5. $\int_a^a f(x)dx = 0$

Ejercicios. Evaluar con el *TFC*

1. $\int_0^3 xdx$
2. $\int_{-1}^1 (3-x^2)dx$
3. $\int_0^{\pi/2} \cos(x)dx$
4. $\int_0^{\pi} \cos(x)dx$
5. $\int_1^3 \frac{dx}{x^2}$
6. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$
7. $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$
8. $\int_0^2 e^{x/2}dx$
9. $\int_1^e \ln(x)dx$
10. $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2}$

8.3 Aplicaciones de la Integral Definida

a) *Área "bajo" la curva*

Se conoce como área "bajo" la curva, al área de la región limitada por la curva y el eje *x*, en un intervalo específico $[a,\ b]$. El área de regiones situadas por arriba del eje *x* son *positivas* y las situadas por debajo de dicho eje son *negativas*.

Ejercicios. Evaluar la integral, aplicando el *TFC*, y calcular el área "bajo" la curva en los intervalos indicados:

1. $f(x) = 2cos(x),\ \ en\ [0,\ \pi/2]\ \ y\ en\ [0,\ \pi]$
2. $f(x) = 2 - x^2,\ \ en\ [0,\ 2]$

3. $f(x) = \sqrt{x},\ en\ [1, 4]$
4. $f(x) = \ln x,\ en\ [1, 3]$
5. $f(x) = x^3 - 3x,\ en\ [-1, 1]$
6. $f(x) = \dfrac{1}{x+2},\ en\ [-6, -3]$
7. Determinar el área de un círculo de radio *r*

b) *Área entre curvas*

Si f y g son continuas en $[a, b]$ y $g(x) \leq f(x)$ $\forall$ x en $[a, b]$, entonces el área de la región limitada por f y g es

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

En términos gráficos, se tiene (figura 12)

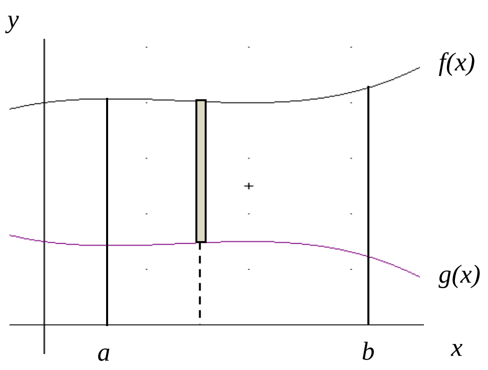


Figura 12

De manera similar se llega a la expresión

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]dy$$

Nota. La fórmula es la misma aunque cambie la posición de las curvas en los cuadrantes.

Ejercicios

1. Hallar el área de la región limitada por las curvas $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$ y $g(x)=x$

   a) Por rectángulos verticales: $A=\int_0^2 (x-1/2x^2)\,dx$

   b) Por rectángulos horizontales: $A=\int_0^2 (\sqrt{2y}-y)dy$

   c) Por resta de áreas: Área = Área del triángulo - Área bajo la parábola.

2. Si las curvas son $y=x-2$, $y^2=x$ y el eje *x*, hallar el área de la región por los tres métodos usados en el ejercicio 1.

3. Para las curvas $y=x^2-2$ y $y=-x$, calcular el área por rectángulos verticales y rectángulos horizontales.

* Resolver ejercicios del problemario

Aplicaciones *de áreas entre curvas*

1) *Cociente de Gini*

El cociente de Gini es un índice que mide el grado de inequidad en la distribución de un bien *x* al interior de un grupo.

<u>*Definición*</u>. Dadas las funciones $f(x)=x$ y $g(x)=x^n$, con $n=1, 2, \dots,$ el cociente de Gini es

$$G_n=\frac{\int_0^1 (x-x^n)dx}{\int_0^1 xdx}$$

Cuya solución general es $G_n=1-\dfrac{2}{n+1}$

A partir de la figura 13, $G_n=$ área entre las curvas / área bajo $f(x)$

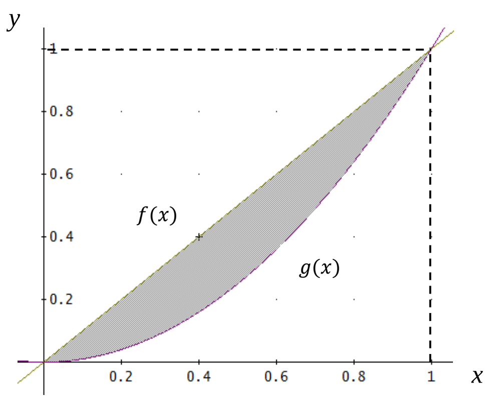


Figura 13

Algunos casos específicos:

Si $n = 1 \Rightarrow G_1 = 0$ $(equidad\ total)$

Si $n = 3 \Rightarrow G_3 = 0.5$

Si $n = 9 \Rightarrow G_9 = 0.8$

$\vdots$

Si $n = \infty \Rightarrow G_\infty = 1$ $(inequidad\ total)$

2) *Excedente del consumidor*

Una función de demanda (precio) representa las cantidades que se pueden comprar de un artículo a diferentes precios. Es decir, la función de demanda es una función marginal.

Los economistas suponen que el precio que un consumidor está dispuesto a pagar por una unidad adicional de un artículo, depende del número de unidades que ya ha comprado.

Ejemplo

Por la primera *TV* se podrían pagar hasta $5,000

Por la segunda *TV* hasta $3,000

Y por la tercera *TV* hasta $1,000

<u>*Definición*</u>. El *Excedente del Consumidor* (*EC*) es el monto que "se ahorra" por comprar en un mercado competitivo (de competencia perfecta).

EC = (monto que se está dispuesto a pagar) – (monto que realmente se paga)

Por ejemplo, si el precio de una *TV* es de $3,000, el consumidor compra dos y el

$$EC = (5,000 + 3,000) - 2(3,000) = 2,000$$

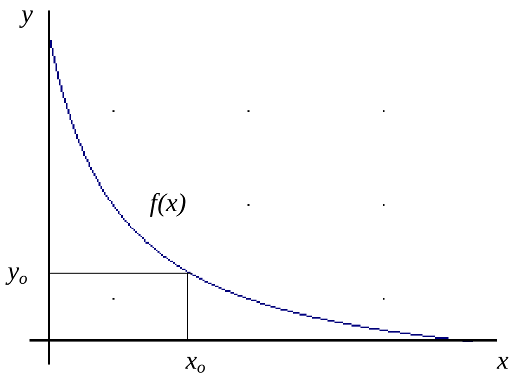


Figura 14

En general (véase la figura 14), si el precio de mercado es y_0 y la cantidad demandada es x_0, entonces

$$EC = \int_0^{x_0} [f(x) - y_0]\,dx$$

El área bajo la curva de demanda representa el gasto potencial y el área limitada por $x_0 y_0$ el gasto real

Ejercicio. A partir de la función de demanda $y = 32 - 4x - x^2$, calcular el *EC* si:

a) $x_0 = 3$

b) $y_0 = 27$

c) *Volumen de sólidos de revolución*

<u>*Definición*</u>. Un sólido de revolución (*S de R*) es el cuerpo que se genera al girar, en torno de un eje de giro, una región específica.

1) Un disco (*cilindro*) como unidad de volumen. Considérese la figura 15

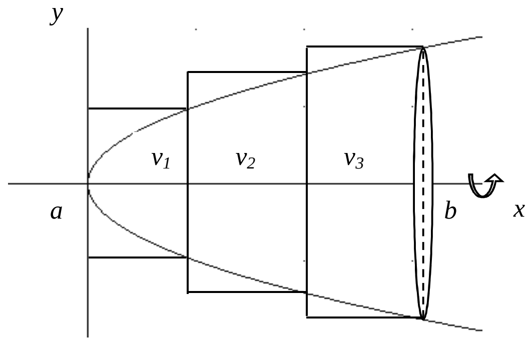


Figura 15

Volumen de un cilindro: $V = \pi[f(x)]^2 \Delta x$

$$V_3 = v_1 + v_2 + v_3$$

$$V_6 = v_1 + v_2 + \cdots + v_6$$

$$\vdots$$

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \pi[f(x_i)]^2 \Delta x$$

$$\vdots$$

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi[f(x_i)]^2 \Delta x$$

$$= \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$

Ejercicios. Hallar el *V del S de R* que se genera al girar cada región en torno del eje indicado:

1. $f(x) = x - 1,\ en\ [1, 3],$ en torno del eje x
2. $f(x) = \sqrt{x},\ en\ [0, 4],$ en torno del eje x
3. $f(x) = x^3,\ en\ [0, 8],$ en torno del eje y
4. Hallar el volumen de una esfera de radio r

2) Una arandela como unidad de volumen

Volumen del S de R (véase la figura 16)

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx - \int_a^b \pi[g(x)]^2 dx$$

$$= \int_a^b \pi\left\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\right\} dx$$

$$= \pi \int_a^b (R^2 - r^2) dx$$

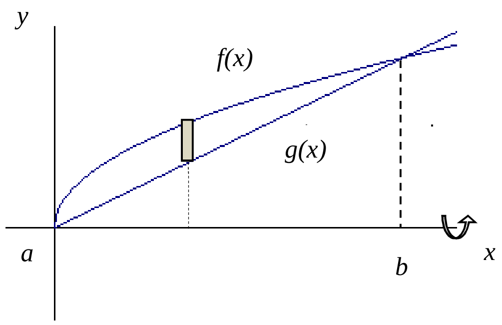


Figura 16

Ejercicios. Hallar el *V del S de R* que se genera al girar cada región en torno de los ejes indicados:

1. $f(x) = x^2 \ \ y \ \ g(x) = 2x,$ en torno de x, en torno de y, de $x = 2 \ \ y\ de \ \ x = 3$
2. $y = x - 2,\ y^2 = x \ \ y \ \ y = 0$, en torno del eje x y en torno del eje y

3. Si se hace un hoyo de 3 cm de radio en el centro de una esfera metálica que tiene 5 cm de radio, ¿qué volumen tendrá el anillo resultante?

d) *Longitud de arco*

¿Cuál es la longitud de la curva (figura 16) en el intervalo $[a, b]$?

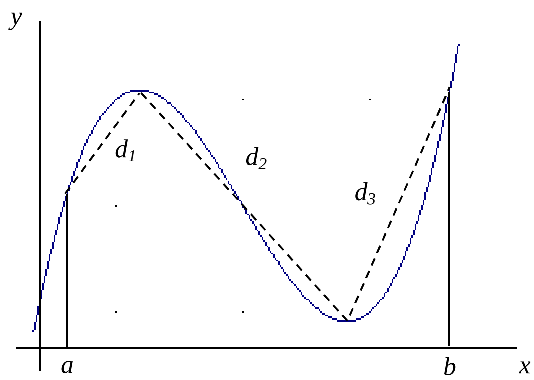


Figura 17

Utilizando sumas de *segmentos*, se tiene

$$L_3 = d_1 + d_2 + d_3$$

$$L_6 = d_1 + d_2 + \cdots + d_6$$

¿Cómo se obtiene la longitud de un segmento? (ver figura 18)

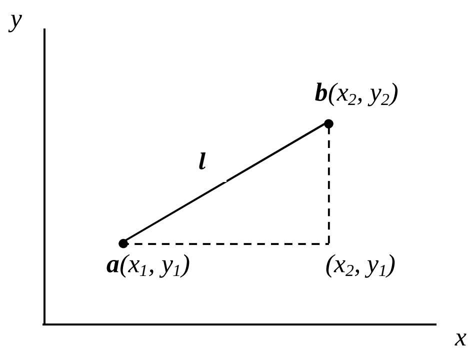


Figura 18

$$l=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\;\Delta x$$

$$=\sqrt{1+\left(f'(x_i)\right)^2}\;\Delta x \quad \text{(usando el \textit{teorema del valor medio})}$$

$$\vdots$$

$$L_n=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(x_i)]^2}\Delta x$$

$$\vdots$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(f'(x_i)\right)^2}\;\Delta x$$

$$=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\;dx$$

O bien, en términos de y

$$L=\int_c^d\sqrt{1+\left(f'(y)\right)^2}\;dy$$

Ejercicios. Determinar la longitud de la curva en el intervalo indicado:

1. $y=\dfrac{4x}{3}+1,\ en\ [0,\ 3]$
2. $y=x^{3/2}+4,\ en\ [0,\ 4]$
3. $y=x^2,\ en\ [0,\ 2]$
4. $y=sen(x),\ en\ [0,\ \pi]$
5. $y=x^{2/3}+1,\ en\ [0,\ 8]$ (despejar x y resolver)
6. Hallar la longitud de una circunferencia de radio r.

7. Hallar la longitud del arco en $y^2 = 8x$, delimitado por su *lado recto*.
8. Calcular, de manera aproximada, la distancia recorrida por un proyectil que sigue la trayectoria $y = x - 0.005x^2$

e) *Trabajo*

<u>*Definición*</u>. De acuerdo a la física clásica, el trabajo *W* realizado por una fuerza constante *F* que mueve un objeto la distancia *d*, se define como

$$W = Fd$$

Por ejemplo, ¿qué trabajo se realiza al desplazar, horizontalmente, un peso de 100 Kg una distancia de 8 m?

Sin embargo, si la fuerza varía de manera continua en el intervalo $[a, b]$, entonces el trabajo que se realiza al mover un objeto desde *a* hasta *b* (ver figura 19), es

$$W_3 = w_1 + w_2 + w_3$$

$$W_6 = w_1 + w_2 + \cdots + w_6$$

$$\vdots$$

$$W_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$\vdots$$

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= \int_a^b f(x)dx$$

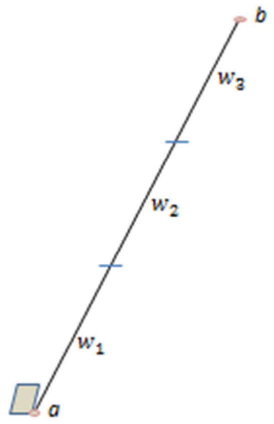


Figura 19

1) *Ley de Hooke*

<u>*Definición*</u>. La fuerza requerida para estirar (comprimir) un resorte (muelle) x unidades a partir de su longitud natural, es directamente proporcional al estiramiento

$$F = kx$$

Ejercicios

1. Si un resorte, cuya longitud natural es de 10 cm, se estira 2 cm con un peso de 12 Kg, ¿qué trabajo se realiza al estirarlo:

a) desde su longitud natural hasta 14 cm?
b) desde 11 hasta 13 cm?

2. Considerando el resorte del ejercicio 1, comparar el trabajo que se requiere para comprimirlo desde 10 hasta 9 cm, con el que se requiere para comprimirlo desde 9 hasta 8 cm.

3. Una cadena de 20 m de longitud que pesa 5 Kg/m yace en el suelo. ¿Cuánto trabajo se precisa para elevar uno de sus extremos hasta 20 m, de manera que quede completamente extendida? Nótese que $\frac{F}{y} = 5$

***2)** Ley de la gravitación universal (Newton)*

<u>*Definición*</u>. La fuerza con la que se atraen dos cuerpos, de masas $m_1 \; y \; m_2$, es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia

$$F = \frac{k\, m_1 m_2}{d^2}$$

4. Si un módulo espacial pesa 15,000 Kg en la superficie de la tierra ¿cuánto trabajo se requiere para elevarlo a una altura de 800 millas? Nótese que $F = 15,000 \; y \; d = 4,000$ (radio de la tierra), por lo que $k\, m_1 m_2 = 240'000,000$

Nota. Por razones de tiempo y complejidad, no ha sido posible abordar otras aplicaciones de las integrales que son importantes en la física y la ingeniería (como presión y fuerza de fluidos, momentos y centros de masa), la probabilidad o la biología. Una excelente explicación se puede encontrar en los textos 5 y 8 de la bibliografía.

8.4 Repaso de Aplicaciones de la Integral Definida

1. *Evaluación* con el *TFC*: $\int_{-3}^{0} e^{-x} dx$
2. *Área "bajo" la curva*: $y = x^2 - 3, \; en \; [0,\; 2]$
3. *Área entre curvas*: $y = \sqrt{1-x}\,,\; y = -x-1 \; y \; el \; eje \; x$
4. *Volumen de S de R*:

   La región del ejercicio 3, en torno de $x = 1$

5. *Longitud de arco*: $y = \frac{4}{3} x^{3/2}, \; en \; [0,\; 2]$
6. *Trabajo:*

   Resorte con longitud natural de 8 cm, que se estira 2 cm con 6 Kg de peso

   a) *desde su longitud natural hasta 10 cm*
   b) *desde 10 hasta 12 cm*

Se debe tener presente que toda integral definida representa el *límite de la suma* de alguna magnitud, así:

- *Una área*, es el límite de la suma de áreas de rectángulos

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

- *Un volumen*, es el límite de la suma de volúmenes de cilindros

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi [f(x_i)]^2\,\Delta x$$

- *Una longitud de arco*, es el límite de la suma de longitudes de segmentos

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left(f'(x_i)\right)^2}\,\Delta x$$

- *Un trabajo*, es el límite de la suma de trabajos parciales

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

8.5 Integrales Impropias

Atención. El Teorema Fundamental del Cálculo (*TFC*) sólo aplica para integrales definidas *propias*.

¿Es válido aplicar el *TFC* a las integrales siguientes?: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$, $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$

Para evaluar una integral definida $\int_a^b f(x)dx$ con el *TFC* se requiere que el intervalo de integración sea *acotado*, $[a,b]$ y que el integrando, $f(x)$ sea *continuo* en $[a,b]$. Pero si algún límite de integración es *infinito* o $f(x)$ tiene alguna *discontinuidad infinita* en $[a,b]$, la integral será *impropia* y no es aplicable el *TFC*.

Ejemplos de *integrales impropias*

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ y $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$, son impropias debido a los límites de integración.

$\int_1^{5} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ y $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2}$, son impropias por la discontinuidad de $f(x)$.

Definiciones

a) *Límites infinitos*

1. Si $f(x)$ es continua en $(-\infty, b]$, entonces $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\left[\int_a^b f(x)dx\right]$
2. Si $f(x)$ es continua en $[a, \infty)$, entonces $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\left[\int_a^b f(x)dx\right]$
3. Si $f(x)$ es continua en $(-\infty, \infty)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$$

b) *Integrandos discontinuos*

1. Si $f(x)$ es continua en $(a, b]$ y tiene una discontinuidad infinita en *a*, entonces

   $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+}\left[\int_c^b f(x)dx\right]$$

2. Si $f(x)$ es continua en $[a, b)$ y tiene una discontinuidad infinita en *b*, entonces

   $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-}\left[\int_a^c f(x)dx\right]$$

3. Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ excepto en algún valor *c*, donde $f(x)$ tenga alguna discontinuidad infinita, entonces

   $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{a\to c^-}\left[\int_a^c f(x)dx\right] + \lim_{b\to c^+}\left[\int_c^b f(x)dx\right]$$

En cada caso, si el límite existe se dice que la integral *converge* y si no existe se dice que *diverge*

Ejercicios

Evaluar las integrales siguientes:

1. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$

2. $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$, comparar con 1

3. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+1}$

4. $\int_0^\infty \cos(x)dx$

5. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$

6. $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

7. $\int_0^1 \ln(x)dx$

8. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}$

9. Si un módulo espacial pesa 15,000 Kg en la superficie de la tierra ¿cuánto trabajo se requiere para enviarlo al infinito?

$$W = \int_{4,000}^\infty \frac{240'}{x^2}dx$$

9. BIBLIOGRAFÍA

1. Aleksandrov, A. *et al.* (1980). *La matemática: su contenido, métodos y significado.* Tomo I. Alianza Editorial. España.
2. Ayres, F. (1991). *Cálculo diferencial e integral*. Editorial McGraw-Hill. México.
3. Fuller, G. (1976). *Álgebra elemental*. Editorial CECSA. México.
4. Hughes-Hallett, D. *et al*. (1995). *Cálculo*. Editorial CECSA. México.
5. Larson, R. *et al*. (1996). *Cálculo (Volumen 1 y Volumen 2), 5ª edición*. Editorial McGraw-Hill. España.
6. Perero, M. (1994). *Historia e historias de matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica.
7. Purcell, E. y D. Varberg (1987). *Cálculo con geometría analítica*. Editorial Prentice Hall. México.
8. Stewart, J. (1999). *Cálculo conceptos y contextos*. Editorial Thomson. México.
9. Valdovinos, V. (2009). *Notas de Matemáticas I y II (Prope)*. Ediciones UACh. México.
10. Zill, D. (1987). *Cálculo con geometría analítica*. Editorial Iberoamérica. México.

ÁLGEBRA LINEAL

La Matemática es una gimnasia del espíritu
y una preparación para la filosofía.
- Isócrates

1. CONCEPTOS BÁSICOS

Con mucha frecuencia, las relaciones existentes entre las variables de un problema se pueden expresar como un Sistema de Ecuaciones Lineales. El Álgebra lineal constituye una poderosa herramienta para formular y resolver tales problemas.

El Álgebra lineal es la rama de las matemáticas en la que se estudia a las matrices, los espacios vectoriales y los sistemas de ecuaciones lineales.

Se considera como precursores del Álgebra lineal moderna a William R. Hamilton (1843 los cuaterniones), Hermann Grassman (1844 extensiones lineales) y Arthur Cayley (1857 álgebra de matrices).

En las presentes notas se inicia con el estudio de las *Matrices*.

<u>*Definición*</u>. Una *matriz* es un arreglo (disposición) rectangular de elementos (números, funciones, operadores, etc.).

El número de filas o renglones (m) y columnas (n) en una matriz, determinan su *orden o tamaño*. Si $m = n$ se tiene una matriz *cuadrada*, y si la matriz tiene solamente una fila o una columna, se denomina *vector fila* o *vector columna*, respectivamente.

Ejemplos

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right]_{3\times 3} \quad \text{(matriz de orden } 3\times 3\text{)}$$

$$B_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(matriz de tamaño } 2\times 3\text{)}$$

$$C_{1\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \quad \text{(matriz de orden } 1\times 3 \text{ o vector fila)}$$

$$D_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{(matriz de tamaño } 3\times 1 \text{ o vector columna)}$$

1.1 Clases de Matrices

***1)** Matriz Diagonal*. Es una matriz cuadrada cuyos elementos fuera de la diagonal principal son todos ceros. Es decir, $A_{n\times n}$ es una matriz diagonal $\Leftrightarrow \begin{cases} a_{ij} = 0, & para\ i \neq j \\ a_{ij} \neq 0, & para\ al\ menos\ un\ \ i = j \end{cases}$

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

***2)** Matriz Escalar*. Es una matriz *diagonal* cuyos elementos en la diagonal principal son todos iguales.

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

***3)** Matriz Identidad*. Es una matriz *escalar* con *unos* en la diagonal principal, comúnmente denotada como I_n

Ejemplos

$$I_1 = [1], \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{etc.}$$

4) *Matriz Nula*. Es una matriz cuyos elementos son todos *cero*.

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

5) *Matriz Transpuesta*. Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de orden $m \times n$, entonces su transpuesta $A' = [a_{ji}]$ es una matriz de orden $n \times m$

Ejemplo: Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, entonces $A' = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

6) *Matriz Simétrica*. Es una matriz en la cual $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall\ i \neq j$, o bien, es una matriz que es igual a su *transpuesta*.

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

7) *Matriz Triangular*. Es una matriz en la cual todos los elementos por arriba o por abajo de la diagonal principal son *ceros*.

Ejemplos

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (matriz triangular superior)

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (matriz triangular inferior)

8) *Matriz Particionada o Subdividida*. Es una matriz cuyos elementos son las *submatrices* que resultan de dividir una matriz con líneas verticales y horizontales.

Ejemplo: $A = \left[\begin{array}{ccc:cc} 2 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & -1 \\ \hdashline 0 & -4 & 6 & 1 & 7 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$

1.2 Operaciones con Matrices

1) *Igualdad de Matrices*. Dos o más matrices son *iguales* si son matrices de igual orden y sus elementos correspondientes son iguales.

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$A = B \iff a_{11} = 2,\ a_{12} = 3,\ etc.$$

2) *Suma de Matrices*. Implica la suma de sus elementos correspondientes.

$$[a_{ij}]_{m\times n} \pm [b_{ij}]_{m\times n} = [c_{ij}]_{m\times n}$$

Donde: $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}\ ,\ \forall\ i, j$

Ejemplo: $Si\ \ A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\ \ y\ \ B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$

entonces $A + B = \begin{bmatrix} 3+a & -1+b \\ 0+c & 2+d \end{bmatrix}$

3) *Multiplicación por un Escalar*. Implica multiplicar cada elemento de la matriz por el escalar $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$

Ejemplo: $Si\ \ \lambda = 3\ \ y\ \ A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$

entonces $\lambda A = 3\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

4) Si a es un vector $1\times n$ y b es un vector $n\times 1$, entonces el *producto punto* (*interno* o escalar) se define como

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Ejemplo: *Si* $a = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ *y* $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, *entonces*

$$a \cdot b = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[(2\times 3) + (1\times 0) + (-3\times 1)\right]$$

$$= \left[6 + 0 - 3\right] = 3$$

5) *Multiplicación de matrices*. Se define como

$$\left[a_{ij}\right]_{m\times p}\left[b_{ij}\right]_{p\times n} = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$$

Donde: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$, *para* $i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n$

(El número de columnas de *A* debe ser igual al número de filas de *B*)

Ejemplo: *Si* $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$,

entonces $AB = \begin{bmatrix} (3\times 2) + (-1\times -1) & (3\times 1) + (-1\times 4) \\ (0\times 2) + (2\times -1) & (0\times 1) + (2\times 4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

Nota. A diferencia del *producto real*, donde $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0,\ b = 0$ *o ambos*, en general:

a) El producto matricial *no es* conmutativo

b) El producto matricial *no cumple* la propiedad del producto cero.

6) *Transposición*. La matriz A' es la transpuesta de *A*, si a_{ij} en *A* es igual a a_{ji} en A'.

Ejemplo: $Si\ A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Nótese que no cambian los elementos de la diagonal principal.

Propiedades de la *suma* de matrices

1) *Conmutativa*

   A + B = B + A
2) *Asociativa*

   (A + B) + C = A + (B + C)
3) *A + 0 = A*
4) *A + (-A) = 0*

Propiedades del *producto* de matrices

1) *Asociativa*

   A(BC) = (AB)C
2) *Distributiva izquierda*

   A(B + C) = AB + AC
3) *Distributiva derecha*

   (B +C)A = BA + CA
4) *Identidad multiplicativa*

   I(A) = I = A(I)

Recuérdese que, en general, $AB \neq BA$

2. DETERMINANTES

Para toda matriz cuadrada *A*, existe un determinante, que se denota por $|A|$ o por $det(A)$.

Para una matriz cuadrada de orden dos $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$

Se tiene, $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Ejemplo: $Si\ A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 3(2) - 0(-1) = 6$

Si la matriz es de orden mayor que dos, para calcular su determinante, normalmente, se utiliza el método denominado "desarrollo por cofactores" o "expansión de Laplace".

2.1 Menores y Cofactores

a) *Menor*. El menor M_{ij}, es el determinante que se obtiene al eliminar en $|A|$ la fila *i* y la columna *j* de A_{ij}.

Ejemplo: $Para\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},\ etc.$$

b) *Cofactor*. El cofactor C_{ij}, correspondiente al elemento $a_{ij}\ de\ |A|$, es el producto de $(-1)^{i+j}\ por\ M_{ij}$. Es decir,

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad \text{(es un menor con signo)}$$

Así, en el ejemplo precedente,

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},\ etc.$$

Los signos de los coeficientes de los menores se alternan de la manera siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

2.2 Desarrollo por Cofactores

El cálculo de un determinante por el método de cofactores es:

a) Expansión por la *i*-ésima fila

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij}\ ,\ \forall\ fila\ i,\ o\ bien$$

$$= a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{in}c_{in}$$

b) Expansión por la *j*-ésima columna

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{ij}\ ,\ \forall\ columna\ \ j$$

$$= a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \cdots + a_{nj}c_{nj}$$

Ejemplo

$Si\ \ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, entonces al desarrollar por la fila 1

$$|A| = 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3(-4) - 1(5) = -17$$

Y desarrollando por la columna 3

$$|A| = -1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1(5) - 4(3) = -17$$

2.3 Propiedades de los Determinantes

a) Condiciones en una matriz que genera determinante cero.

Si A es una matriz cuadrada y se cumple una de las condiciones siguientes, entonces el $det\,(A) = 0$:

1. Una fila o columna tiene solo ceros

Ejemplo: Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (2\times 0) - (0\times 1) = 0$

2. Dos filas o columnas son iguales

Ejemplo: $Si\ A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (2\times 1) - (1\times 2) = 0$

3. Una fila o columna es múltiplo de otra fila o columna

Ejemplo: $Si\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (1\times 6) - (3\times 2) = 0$

b) Operaciones elementales con los determinantes

Sean A y B matrices cuadradas

1. Si B se obtiene de A, intercambiando dos filas o columnas, entonces $det\,(B) = -det\,(A)$

Ejemplo: $Si\ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2$

Ahora bien, intercambiando las filas, se tiene

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \; y \; |B| = -2$$

2. Si *B* se obtiene de *A*, sumando un múltiplo de una fila o columna de *A* a una fila o columna de *B*, entonces $det\,(B) = det\,(A)$

Ejemplo: $Si \;\; A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2$

Al sumar el producto $2\times fila\ 2$ a la fila 1, resulta

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \; y \; |B| = 2$$

3. Si *B* se obtiene de *A*, multiplicando una fila de *A* por una constante $k \neq 0$, entonces $det\,(B) = kdet\,(A)$

Ejemplo: $Sea \;\; A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\; con\; |A| = 2$, si la columna 2 se multiplica por 3, entonces

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \; y \; |B| = 6 = 3(2)$$

4. El determinante de *A* es igual al determinante de la transpuesta de *A*

$$det\,(A) = det\,(A')$$

Ejemplo: $Si \;\; A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2$

Y dado que $A' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A'| = 2$

5. El determinante del producto *AB* es igual al producto de los determinantes de *A* y *B*

$$|A\,B| = |A|\,|B|$$

Ejercicio. Comprobar la propiedad 5 para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

6. El determinante de una matriz triangular (superior o inferior) es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Ejemplo: $Si \;\; A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, entonces $|A| = 1(3)(2) = 6$

7. De manera similar que la propiedad 6, el determinante de una matriz diagonal es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Ejemplo: $Si \;\; A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, entonces $|A| = 3(1)(-2) = -6$

3. MATRIZ INVERSA

Definición. Una matriz A de orden $n \times n$ es invertible, si existe una matriz B de orden $n \times n$, tal que cumple

i) $BA = AB = I$

ii) A es no singular

La matriz B se denomina la inversa de A y se denota como A^{-1}

Determinar la inversa de una matriz es importante, entre otras razones, porque permite la solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales (*SEL*)

Ejemplo. Resolver el *SEL* $A\,x = b$

Premultiplicando por A^{-1}, resulta

$$A^{-1}A\,x = A^{-1}b$$

$$I\,x = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b$$

Es importante recordar que solo tienen inversa las matrices no singulares.

A es una matriz *singular* si $det(A) = 0$

Hay dos métodos básicos para determinar la inversa de una matriz: el método de la matriz adjunta y el de Gauss-Jordan.

3.1 Método de la Matriz Adjunta

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,adjunta\,(A)$$

La *adjunta* de una matriz es la matriz de cofactores transpuesta.

Ejemplo: $Si\ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2,$ y

$$C_{11} = (-1)^{1+1}|1| = 1\times 1 = 1$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}|-1| = -1(-1) = 1$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}|0| = -1\times 0 = 0$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}|2| = 1\times 2 = 2$$

Así, la matriz de cofactores es $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Y la $adj(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore\ A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio. Comprobar que $A^{-1}A = A\,A^{-1} = I$

Ejercicio. Hallar A^{-1} si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

La *solución* es $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/9 & 1/9 \\ -1/3 & 2/9 & 2/9 \\ -2/3 & -2/9 & 7/9 \end{bmatrix}$

3.2 Método de Gauss-Jordan

En este método, la *matriz aumentada* $[A|\ I]$ se transforma, mediante Operaciones Elementales de Filas (*OEF*), en la matriz $[I\ |\ B]$, *donde* $B = A^{-1}$

Una *OEF* en una matriz, genera otra matriz que es equivalente a la primera.

Las *OEF* son tres:

1. Multiplicar una fila por un escalar (diferente de cero)
2. Intercambiar filas
3. Sumar un múltiplo de una fila a otra fila.

Ejemplo. Hallar A^{-1} *si* $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

La matriz aumentada es

$$[A|\ I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Resolviendo con DERIVE u otro software de matemáticas se obtiene (comprobar)

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1/3 & 1/9 & 1/9 \\ -1/3 & 2/9 & 2/9 \\ -2/3 & -2/9 & 7/9 \end{bmatrix}$$

4.3 Propiedades de la Inversa

1. $(A^{-1})^{-1}=A$
2. $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$
3. $(A')^{-1}=(A^{-1})'$
4. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

Ejercicio. Ilustrar cada una de las propiedades con $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ *y* $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Por ejemplo, para la propiedad 1, usando el método de la matriz adjunta,

Como $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$

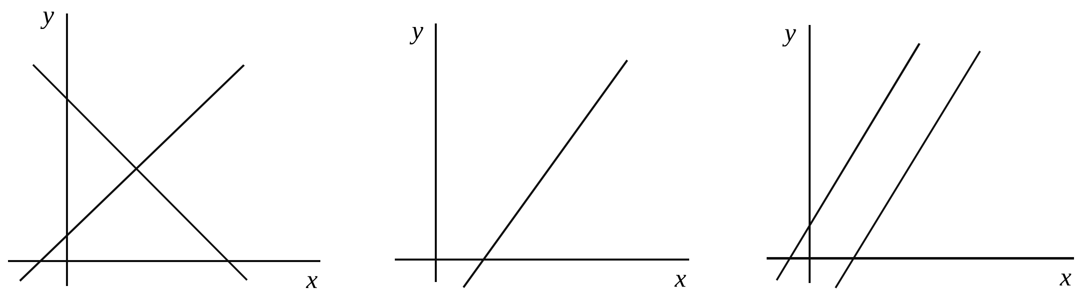
Por lo tanto, $(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{1/2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

4. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un Sistema de Ecuaciones Lineales (*SEL*) puede ser:

$$SEL\begin{cases} Consistente\ (tiene\ solución)\begin{cases} Independiente\ \ (una\ solución) \\ Dependiente\ \ (\infty\ soluciones) \end{cases} \\ Inconsistente\ (no\ tiene\ solución) \end{cases}$$

Gráficas de un SEL en dos variables



Sistema *independiente* (solución única) — Sistema *dependiente* (infinitas soluciones) — Sistema *inconsistente* (sin solución)

4.1 Métodos de Solución de un SEL

Además del método gráfico se identifican cinco métodos más:

1. Por eliminación (sumas y restas)
2. Por sustitución
3. Por la regla de *Cramer*
4. Por la matriz inversa
5. Por la forma escalonada

Ejemplo. Usar cada uno de estos métodos para resolver el *SEL* siguiente:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 5 \quad \cdots(1) \\ x_1 + 3x_2 &= -1 \quad \cdots(2) \end{aligned}$$

1. Eliminación:

Al multiplicar la ecuación (1) por 3 y sumar, se tiene

$$7x_1 = 14 \;\Rightarrow\; x_1 = 2$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (2), resulta $x_2 = -1$

2. Sustitución:

Despejando x_1 de la ecuación (2), se obtiene $x_1 = -3x_2 - 1$

Sustituyendo en la ecuación (1), resulta $2(-3x_2 - 1) - x_2 = 5$

$$-6x_2 - 2 - x_2 = 5;\; -7x_2 = 7 \;\therefore\; x_2 = -1 \;\; y \;\; x_1 = -3(-1) - 1 = 2$$

3. Regla de *Cramer*

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{15-1}{6+1} = \frac{14}{7} = 2$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-2-5}{6+1} = \frac{-7}{7} = -1$$

4. Matriz inversa

$$Ax = b \;\Rightarrow\; x = A^{-1}b$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/7 & 1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15/7 - 1/7 \\ -5/7 - 2/7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14/7 \\ -7/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \;\therefore\; \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

5. Forma escalonada (véase el inciso siguiente)

$$[A|b]=\begin{bmatrix}2 & -1 & 5\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}$$

Resolviendo con el programa DERIVE, se tiene

$$row\_reduce\begin{bmatrix}2 & -1 & 5\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\ \therefore\ \begin{cases}x_1=2\\ x_2=-1\end{cases}$$

4.2 Forma Escalonada de una Matriz

Problema de la *existencia y unicidad* de la solución.

Ante cualesquier *SEL* surgen dos preguntas fundamentales:

1. ¿El *SEL es consistente*? Es decir, ¿existe al menos una solución?
2. Si la solución existe, ¿es *única*?

Ambas preguntas se pueden contestar, reduciendo la matriz aumentada del sistema $[A|b]$, a la *Forma Escalonada* (*FE*)

Ejemplos

1. Si después de trabajar una matriz aumentada quedara en la *FE* siguiente:

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & -7\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0\\ \qquad x_2-4x_3=-7\\ \qquad\qquad x_3=2\end{cases}$$

Se estaría seguro que el sistema es consistente y tiene solución única.

2. Si la *FE* de la matriz aumentada fuese:

$$\begin{bmatrix}1 & -0 & -5 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1 \qquad -5x_3=1\\ \qquad x_2+x_3=4\\ \qquad\qquad 0=0\end{cases}$$

La *solución general* del sistema sería:

$$Solución\ \ gral.\begin{cases} x_1 = 1 + 5x_3 \\ x_2 = 4 - x_3 \\ x_3 \ \ libre \end{cases}$$

Por lo tanto, el sistema sería consistente con infinitas soluciones. Por ejemplo, si $x_3 = 1,\ \ x_1 = 6\ \ y\ \ x_2 = 3,\ \cdots$

3. Y si la *FE* fuese:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 \qquad - x_3 = 3 \\ \qquad x_2 + 4x_3 = 7 \\ \qquad\qquad 0 = 5 \end{cases}$$

El sistema sería inconsistente, sin solución. Hay una contradicción en la última ecuación.

Teorema de existencia y unicidad

Un *SEL* es consistente, si y sólo si, la *FE* de la matriz aumentada ***no*** contiene alguna fila del tipo $[0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad b],\ \ con\ \ b \neq 0$

Si el sistema es consistente, entonces el conjunto solución:

- Tiene infinitas soluciones si existe, al menos, una *variable libre*
- Tiene solución única si *no* existen variables libres.

Ejercicios. Hallar la solución, mediante la *FE*, de los sistemas siguientes:

1. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$
3.

Un procedimiento alternativo para contestar la pregunta sobre la *existencia y unicidad* de la solución de un *SEL*, está basado en el estudio del *rango* de una matriz.

4.3 Rango de una Matriz

El *rango* de una matriz *A*, denotado como *r(A)*, indica el número de filas o columnas *linealmente independientes* en *A*. Es decir, el número de filas o columnas *pivote* (filas o columnas $\neq 0$) de la *FE*. El *r(A)* también lo da el *orden del menor no nulo de mayor orden en A*.

Específicamente:

1) Si el $r(A) = r(A|b)$, entonces el sistema es consistente

a) Si el $r(A) = r(A|b) = n$, entonces existe sólo *una* solución y se dice que la matriz es de rango completo
b) Si el $r(A) = r(A|b) < n$, entonces existen *infinitas* soluciones

2) Si el $r(A) \neq r(A|b)$, entonces el sistema es inconsistente

Ejemplo. En el sistema siguiente

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, $r\,(A) = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Se tiene $r\,(A \mid b) = 3$

Por lo tanto, dado que $r\,(A) \neq r\,(A \mid b)\,,\;\; 2 \neq 3$

Se concluye que el sistema es inconsistente, no tiene solución.

Ejercicio. Analizar el rango y la solución del sistema siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Definición. Un *SEL* es ***homogéneo*** si se puede escribir en la forma matricial $A\,x = 0$. Tal sistema siempre tendrá al menos una solución, la solución *trivial* $x = 0$. Y tendrá también una solución no trivial, si y sólo si, su *solución general* tiene al menos una variable libre.

Ejemplo. Indagar si el sistema siguiente tiene una solución no trivial

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 6x_1 + x_2 - 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{bmatrix} \cdots \;\; Solución\;\; gral. \begin{cases} x_1 = (4/3)x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \;\; libre \end{cases}$$

Por lo tanto, el sistema tiene *infinitas* soluciones no triviales.

5. APLICACIONES EN ECONOMÍA

1. Para una economía con varios sectores, ***Leontief*** demostró el resultado siguiente:

Existen *valores de equilibrio* que se pueden asignar a los *rendimientos totales* de los diversos sectores de una economía, de manera tal que los *ingresos* de cada sector igualen (balanceen) a sus *gastos*.

Ejemplo

Supóngase que una economía tiene tres sectores: Carbón, Electricidad y Acero. Y que la producción de cada sector se distribuye entre los tres sectores, como se muestra en el cuadro siguiente:

Distrib. de la producción / Comprada por:	Carbón	Electricidad	Acero
Carbón	0	0.4	0.6
Electricidad	0.6	0.1	0.2
Acero	0.4	0.5	0.2

Ingresos del Carbón: V_C (valor del rendimiento total)

Gastos del Carbón: $0.4V_E + 0.6V_A$

Así,
$$\begin{aligned} V_C &= 0.0V_C + 0.4V_E + 0.6V_A \\ V_E &= 0.6V_C + 0.1V_E + 0.2V_A \\ V_A &= 0.4V_C + 0.5V_E + 0.2V_A \end{aligned}$$

O bien,
$$\begin{aligned} V_C - 0.4V_E - 0.6V_A &= 0 \\ -0.6V_C + 0.9V_E - 0.2V_A &= 0 \\ -0.4V_C - 0.5V_E + 0.8V_A &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.4 & -0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.9 & -0.2 & 0 \\ -0.4 & -0.5 & 0.8 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -0.4 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0.66 & -0.56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -0.4 & -0.6 & 0 \\ 0 & 1 & -0.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.94 & 0 \\ 0 & 1 & -0.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad Solución \;\; gral. \begin{cases} V_C = 0.94V_A \\ V_E = 0.85V_A \\ V_A \;\; libre \end{cases}$$

Por lo tanto, si $V_A = 100 \Rightarrow V_C = 94 \;\; y \;\; V_E = 85$. Es decir, los *ingresos y gastos* de cada sector serán *iguales*, si la producción de Carbón se valora en 94, la producción de Electricidad se valora en 85 y la del Acero en 100.

2. *Modelo Insumo-Producto de Leontief*

El modelo se plantea en los términos siguientes:

Producción Total = Demanda Intermedia + Demanda Final

Y utilizando matrices se tiene:

$$x = Cx + d$$

$$Ix - Cx = d$$

$$(I - C)x = d$$

$$x = (I - C)^{-1}d$$

Donde x es la producción total, C el consumo intermedio y d la demanda final.

La solución se puede encontrar con la *FE* de la matriz aumentada $\left[(I - C) \mid d\right]$

Ejemplo

Si la *matriz de Consumo* fuese la indicada en el cuadro de la página siguiente y la *demanda final d*, fuese de 50 *u* para Manufactura, 30 *u* de Productos Agrícolas y 20 *u* para Servicios, ¿qué monto de producción satisface esta demanda?

Insumos / u producida — Comprados a:	(M)	(A)	(S)
Manufactura (M)	0.50	0.40	0.20
Agricultura (A)	0.20	0.30	0.10
Servicios (S)	0.10	0.10	0.30

En este caso

$$I - C = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.4 & -0.2 \\ -0.2 & 0.7 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.4 & -0.2 & 50 \\ -0.2 & 0.7 & -0.1 & 30 \\ -0.1 & -0.1 & 0.7 & 20 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 226 \\ 0 & 1 & 0 & 119 \\ 0 & 0 & 1 & 78 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la solución general es $\begin{cases} M = 226 \\ A = 119 \\ S = 78 \end{cases} \quad \leftarrow$ (valores redondeados)

3. En muchos campos de la ciencia surge la necesidad de describir el comportamiento de un sistema que cambia con el tiempo (sistema dinámico). Si algunas características del sistema se miden de forma periódica (discreta), se genera una *sucesión* de vectores x_0, x_1, x_2, $\cdots$, x_k. Las componentes de x_k proporcionan información sobre el *estado* del sistema, en el momento de la k-ésima medición.

Si existe una matriz A, tal que

$$x_1 = Ax_0\,,\;\; x_2 = Ax_1,\;\; \cdots,\;\; x_{k+1} = Ax_k\,, \quad para \;\; k = 0, 1, 2, \cdots$$

Entonces se trata de una ecuación (modelo) en diferencias lineal, tal que, si x_0 es conocida, se pueden calcular los subsecuentes valores para x_1, x_2, $\cdots$

Ejemplo

Intercambio de población entre una ciudad y los suburbios.

Si se toma como año inicial 1990 y la población de la ciudad y los suburbios se representan por $c_0 \;\; y \;\; s_0$, respectivamente, entonces $x_0 = \begin{bmatrix} c_0 \\ s_0 \end{bmatrix}$ y para 1991 y los años subsecuentes, se tendrá

$$x_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ s_1 \end{bmatrix}, \;\; x_2 = \begin{bmatrix} c_2 \\ s_2 \end{bmatrix}, \;\; \cdots$$

Si los registros demográficos indican que cada año el 5% de los pobladores de la ciudad se van a vivir a los suburbios y que el 3% de la población suburbana se va a vivir a la ciudad. Pasado un año, la población original de la ciudad c_0, se habrá distribuido entre la ciudad y los suburbios de la manera siguiente:

$$c_0 = \begin{cases} 0.95 & \leftarrow \;\; \textit{población que permanece en la ciudad} \\ 0.05 & \leftarrow \;\; \textit{población que se va a los suburbios} \end{cases}$$

Y la población original de los suburbios s_0, tendrá la distribución siguiente:

$$s_0 = \begin{cases} 0.03 & \leftarrow \;\; \textit{población que se va a la ciudad} \\ 0.97 & \leftarrow \;\; \textit{población que permanece en los suburbios} \end{cases}$$

Los vectores anteriores dan cuenta del *estado* de la población total en 1991. Es decir,

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ s_0 \end{bmatrix}$$

Que, en términos generales, indica que $x_1 = Ax_0$. Siendo *A* la “matriz de migración” que se muestra en la tabla siguiente:

Desde / Hacia	Ciudad	Suburbios
Ciudad	0.95	0.03
Suburbios	0.05	0.97

Si los % de migración se mantienen *constantes*, el cambio de población de 1991 a 1992 será $x_2 = Ax_1$ y, en términos generales, se tendrá:

$$x_{k+1} = Ax_k\,, \quad para \quad k = 0\,,\, 1,\; 2\,,\, \cdots$$

Ejemplo

Calcular el tamaño de la población para 1991 y 1992, si en 1990 había 600 000 habitantes en la ciudad y 400 000 en los suburbios.

En 1990

$$x_0 = \begin{bmatrix} c_0 \\ s_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600\ 000 \\ 400\ 000 \end{bmatrix}$$

En 1991,

$$x_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ s_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600\ 000 \\ 400\ 000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 570\ 000 + 12\ 000 \\ 30\ 000 + 388\ 000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 582\ 000 \\ 418\ 000 \end{bmatrix}$$

Y en 1992

$$x_2 = \begin{bmatrix} c_2 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 582\ 000 \\ 418\ 000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 552\ 900 + 12\ 540 \\ 29\ 100 + 405\ 460 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 565\ 440 \\ 434\ 560 \end{bmatrix}$$

Vector de estado estacionario

Si P es una matriz estocástica, entonces un vector de *estado estacionario* (o vector de equilibrio) para P, es un vector de probabilidad q tal que

$$Pq = q$$

Se puede demostrar, que cada matriz estocástica tiene un vector de estado estacionario.

Por ejemplo, el vector $q = \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.625 \end{bmatrix}$, es un vector de estado estacionario para la matriz de migración A del ejemplo anterior, porque

$$Aq = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.625 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.35625 + 0.1875 \\ 0.01875 + 0.60625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.625 \end{bmatrix} = q$$

Si la población total de la ciudad fuese de un millón, entonces

$$q = \begin{bmatrix} 375{,}000 \\ 625{,}000 \end{bmatrix}$$

Por tanto, al término de un año, la migración desde la ciudad hacia los suburbios sería de

(0.05)(375,000) = 18,750 personas

Y la migración desde los suburbios hacia la ciudad seria de

(0.03)(625,000) = 18,750 personas

Es decir, la población en la ciudad sería estable, al igual que en los suburbios.

6. VALORES Y VECTORES PROPIOS

<u>*Definición*</u>. Dada una matriz cuadrada A de dimensión n, el escalar $\boldsymbol{\lambda}$ es un ***valor propio***[1] de A, si existe un vector no nulo $x \in R^n$, tal que,

$$Ax = \lambda x$$

En tal caso, se dice que $\boldsymbol{x}$ es un ***vector propio*** de A asociado a λ.

Los *valores y vectores propios* se usan ampliamente en optimización, ecuaciones diferenciales, estadística, en el estudio de sistemas dinámicos y muchas otras ramas de la ciencia.

Ejemplo

El signo de un hessiano o de una forma cuadrática se puede comprobar utilizando valores propios. Así también, se pueden deducir las propiedades de A^n estudiando el número λ^n, puesto que,

$si\ Ax = \lambda x$, entonces

$$A^2 x = A(Ax) = A\lambda x = \lambda Ax$$

$= \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x$, y por inducción resulta

$$A^n x = \lambda^n x, \quad \forall\ n \in N$$

Determinación de valores y vectores propios.

De $Ax = \lambda x$, se tiene

$$Ax - \lambda x = 0, \quad [A - \lambda I]x = 0$$

- La matriz $[A - \lambda I]$ se denomina ***matriz característica*** de A.

---

1 Nota de Abel Valdez

a) *Valor propio* = autovalor = eigenvalue = valor característico = valor latente
b) *Vector propio* = autovector = eigenvector = vector característico = vector latente

- El determinante de $[A-\lambda I]$ da un polinomio en λ de grado *n*, denominado ***polinomio característico*** de *A*.
- Y la ecuación $|A-\lambda I|=0$ se conoce como ***ecuación característica*** de *A*.

Si λ es un *autovalor* de *A*, el sistema homogéneo $[A-\lambda I]=0$ debe tener una solución no trivial, y ello sólo puede ocurrir si $[A-\lambda I]$ es singular. Es decir, si y sólo si, su determinante es cero.

Por lo tanto, los *autovalores* son las raíces del *polinomio característico* de *A*.

- Cada *autovalor* lleva *asociado* como *autovector* la solución, no nula, del sistema homogéneo $[A-\lambda I]x=0$.

Ejemplos

Determinar los *autovalores y autovectores* de las matrices dadas

1. $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$[A-\lambda I]=\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda-4=0$$

$$(\lambda-4)(\lambda+1)=0.$$

Por lo tanto,

$\lambda_1=-1$ y $\lambda_2=4$ son los autovalores

Para $\lambda=-1$, $[A-\lambda I]=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Y la solución del sistema homogéneo $[A-\lambda I]x=0$ es

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con la solución general $\begin{cases} x_1 = (-1/2)x_2 \\ x_2 \;\; libre \end{cases}$

Así, si $x_2 = 2r$, entonces

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r \\ 2r \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ es el autovector}$$

Para $\lambda = 4$, $[A - \lambda I] = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

La solución del sistema homogéneo $[A - \lambda I]x = 0$, es

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con la solución general $\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_2 \;\; libre \end{cases}$

Así, si $x_2 = s$, entonces

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ es el autovector

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$[A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 3 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)^2(\lambda+1) = 0$$

Por lo tanto,

$\lambda_1 = -1 \;\; y \;\; \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ son los autovalores

Para $\lambda = -1, \quad [A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

La solución del sistema homogéneo $[A - \lambda I]x = 0$, es

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & -6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con la solución general $\begin{cases} x_1 = (1/4)x_3 \\ x_2 = (-3/4)x_3 \\ x_3 \;\; libre \end{cases}$

Así, si $x_3 = 4r$, entonces

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ -3r \\ 4r \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ es el autovector}$$

Ejercicio. Comprobar que

Si $\lambda = 2, \quad [A - 2I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

La solución general es $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \ \ libre \end{cases}$

Así, si $x_3 = s$, entonces

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ es el autovector

Aplicación[2]

Ardillas y ratas habitan el mismo ecosistema y compiten mutuamente por alimento, agua y espacio. Sean $x(t)$ y $y(t)$ las poblaciones de ardillas y ratas en el tiempo t (años), respectivamente. En ausencia de ratas la tasa de crecimiento de ardillas es $x'(t) = 2.5\,x(t)$, pero cuando están presentes las ratas, la competencia frena la tasa de crecimiento de las ardillas a $x'(t) = 2.5\,x(t) - y(t)$. La población de ratas es afectada de manera similar por las ardillas. En ausencia de ardillas, la tasa de crecimiento de la población de ratas es $y'(t) = 2.5\,y(t)$, y la tasa de crecimiento poblacional para las ratas cuando comparten el ecosistema con las ardillas es $y'(t) = 2.5\,x(t) + 2.5y(t)$.

Suponiendo que inicialmente hay 60 ardillas y 60 ratas en el ecosistema, determinar lo que ocurre con estas dos poblaciones.

Solución

$$\frac{dx}{dt} = 2.5\,x - y \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{4}x + 2.5y$$

$$x' = Ax = \begin{bmatrix} 2.5 & -1 \\ -\frac{1}{4} & 2.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

[2] Aportación de José E. Pérez

$$det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 2.5-\lambda & -1 \\ -\frac{1}{4} & 2.5-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$(2.5-\lambda)(2.5-\lambda)-(-\frac{1}{4})(-1)=0$$

$$\lambda^2-5\lambda+6=0\,,\;(\lambda-3)(\lambda-2)=0$$

Por lo tanto $\lambda_1=3\;\; y\;\; \lambda_2=2$

Para $\lambda_1=3\;\; k_1=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Y para $\lambda_2=2\;\; k_2=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Así, $P=\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\;\; y\;\; AP=\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$P^{-1}=\begin{bmatrix} -1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

y $diag(A)=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Si $x'=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\;\Rightarrow\;\begin{cases} x'=3x \\ y'=2y \end{cases}$

Y resolviendo $x=c_1e^{3t}\;\; y\;\; y=c_2e^{2t}$

Si $x=\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, entonces

$$\begin{cases} x(t)=-2c_1e^{3t}+2c_2e^{2t} \\ y(t)=c_1e^{3t}+c_2e^{2t} \end{cases}$$

Condiciones iniciales: $en\;\; t=0\,,\;\; x(t)=60\;\; y\;\; y(t)=60$

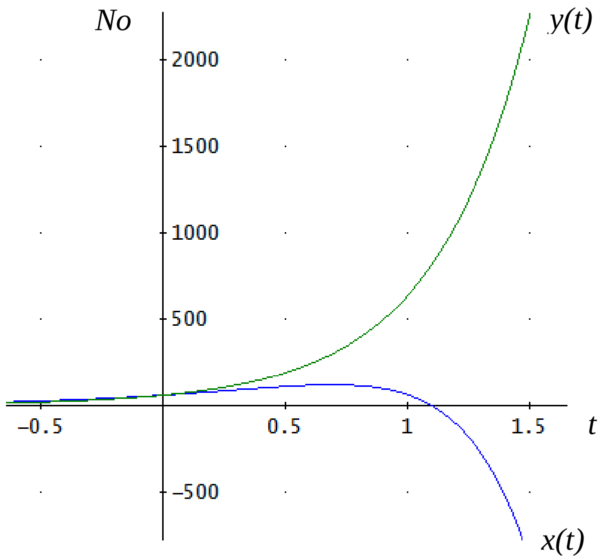
Si $\begin{cases} 60 = -2c_1e^0 + 2c_2e^0 \\ 60 = c_1e^0 + c_2e^0 \end{cases}$, entonces

$c_1 = 15 \ \ y \ \ c_2 = 45$

Por lo tanto,

$$x(t) = -30e^{3t} + 90e^{2t} \quad \text{y} \quad y(t) = 15e^{3t} + 45e^{2t}$$

Como se muestra en la gráfica siguiente



Conclusión

Si no se controla la cantidad de ratas en los primeros 6 meses del año, al final de ese año habrán muerto o emigrado los ardillas.

7. DERIVACIÓN MATRICIAL

Con frecuencia, en optimización se deben derivar expresiones que contienen matrices. La derivada de algunas expresiones simples que contienen matrices, se puede obtener directamente de su definición. Aquí se definirán las *derivadas de formas lineales, formas cuadráticas y formas bilineales*.

a) *Derivación de una forma lineal*

Una expresión de la forma $a'x$, en donde a y x son vectores de orden $n \times 1$, es una *forma lineal*, y su derivada con respecto a *x* es

$$\frac{\partial(a'x)}{\partial x} = a$$

b) *Derivación de una forma cuadrática*

Una expresión de la forma $x'Ax$, en donde *A* es una matriz simétrica de orden $n \times n$, recibe el nombre de *forma cuadrática*, y su derivada con respecto a *x* es

$$\frac{\partial(x'Ax)}{\partial x} = 2Ax$$

o bien

$$\frac{\partial(x'Ax)}{\partial x} = 2x'A$$

c) *Derivación de una forma bilineal*

Una expresión de la forma $x'Bz$, en donde x' es $1 \times m$, B es $m \times n$ y z es $n \times 1$,

se denomina *forma bilineal*, y sus derivadas son

$$\frac{\partial(x'Bz)}{\partial x} = Bz$$

$$\frac{\partial(x'Bz)}{\partial z} = B'x$$

***Aplicación** en el análisis multivariado*

La derivación matricial se emplea en muchos problemas de optimización. En particular, se utiliza para deducir estimadores en el análisis multivariado. Como ejemplo, se verá como se obtienen los estimadores de regresión por mínimos cuadrados.

En el modelo de regresión multivariada, se supone una relación lineal entre la variable predecible *y*, y *k* variables predictoras x_k y un término de aleatoriedad *u*. Para el caso de una muestra de *n* observaciones sobre *y* y las *x*, se tiene

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + u_i\,, \quad i = 1,\, 2,\, \cdots,\, n$$

Las *n* ecuaciones se pueden representar en *notación matricial* como

$$y = x\beta + u$$

Donde:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & & & \vdots & \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

Como resultado de la convención de representar la observación *i*-ésima para la variable *k*-ésima por x_{ki}, los subíndices de la matriz *x* están expresados al contrario de cómo se expresan usualmente en una matriz.

El problema consiste en obtener estimadores de β. Tales estimadores suelen obtenerse por el método de *mínimos cuadrados*. Si $\hat{\beta}$ estima a β, entonces $y = x\hat{\beta} + e$, donde *e* designa el vector de los errores de predicción. Como el criterio de mínimos cuadrados exige que se minimice la suma de los cuadrados de dichos errores, se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e'e$$

$$= (y - x\hat{\beta})'(y - x\hat{\beta})$$

$$= (y' - \hat{\beta}'x')(y - x\hat{\beta})$$

$$= y'y - y'x\hat{\beta} - \hat{\beta}'x'y + \hat{\beta}'x'x\hat{\beta}$$

$$= y'y - 2y'x\hat{\beta} + \hat{\beta}'(x'x)\hat{\beta} \rightarrow (*)$$

(Dado que $\hat{\beta}'x'y$ es un *escalar*, y por tanto, igual a su transpuesto $y'x\hat{\beta}$)

Así, al derivar en (*) una *forma bilineal* (2º término) y una *cuadrática* (3er término), se tiene

$$\frac{\partial(*)}{\partial\hat{\beta}} = -2x'y + 2x'x\hat{\beta} = 0$$

y $\hat{\beta} = (x'x)^{-1}x'y$

$\hat{\beta}$ es el vector de *estimadores* de β por mínimos cuadrados.

Aplicando la condición de segundo orden para $\hat{\beta}$, se tiene

$$\frac{\partial^2}{\partial\hat{\beta}^2}[e'e] = \frac{\partial}{\partial\hat{\beta}}[-2x'y + 2x'x\hat{\beta}]$$

$$= 2x'x$$

Para un mínimo, $x'x$ debe ser definida positiva, lo cual normalmente ocurre en los ejemplos prácticos.

8. ESPACIOS VECTORIALES

Para realizar el análisis y determinar la solución de problemas, formulados como modelos lineales, es necesario recurrir a métodos derivados del *álgebra lineal*, principalmente los ***espacios vectoriales***, *las matrices y los conjuntos convexos*.

Los espacios vectoriales y los conjuntos convexos, aportan elementos *teóricos*, que permiten interpretar el modelo lineal como un problema entre vectores, y las matrices, además de ofrecer una notación sencilla y concisa, constituyen un potente método general de cálculo.

8.1 Nociones Previas

1) *Conjuntos*. Un conjunto es una colección cualesquiera de elementos

Definición. Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, entonces se define:

a) La unión

$$A \bigcup B = \{x \mid x \in A \; o \; x \in B\}$$

b) La intersección

$$A \bigcap B = \{x \mid x \in A \; y \; x \in B\}$$

c) El complemento

$$A^c = \{x \mid x \notin A\}$$

d) El producto cartesiano (cruz)

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \; y \; b \in B\}$$

* Hacer la representación con diagramas de Venn

2) *Relaciones entre conjuntos*

a) *Correspondencia* entre los conjuntos X y Y. Es cualesquier asociación de los elementos de X con los elementos de Y.

b) *Aplicación* de *X* en *Y*. Es toda correspondencia que asocie cada elemento de *X* con solo un elemento de *Y*.

c) *Función* de *X* en *Y*. Es cualesquier aplicación entre conjuntos numéricos. Por ejemplo, $f : R^n \to R$

8.2 Estructuras Matemáticas

Según las operaciones que admitan y las propiedades que cumplan tales operaciones, los conjuntos (numéricos) conforman diferentes estructuras matemáticas. Las más relevantes son: los *grupos*, los *cuerpos* y los *espacios vectoriales*.

a) *Grupo* $\{G, +\}$

Estructura matemática formada por un conjunto *G*, y una operación interna **+**, que asocia cada dos elementos de *G* con otro elemento de *G*, y que cumple tres propiedades:

1. Propiedad asociativa

$(a+b)+c = a+(b+c)$

2. Elemento neutro

$a+0=0+a=a$

3. Elemento simétrico (inverso)

$a+(-a)=0$

b) *Cuerpo* $\{C, +, \cdot\}$

Estructura matemática formada por un conjunto *C*, y dos operaciones internas $+ \ y \ \cdot$, que cumplen las propiedades siguientes:

1. Propiedad asociativa

$(a+b)+c = a+(b+c) \ \ y \ \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

2. Propiedad conmutativa para **+**

$a+b=b+a$

3. Elementos neutros

$a+0=0+a=a \;\; y \;\; a\cdot 1=1\cdot a=a$

4. Elementos simétricos (inversos)

$a+(-a)=0 \;\; y \;\; a\cdot a^{-1}=1$

5. Propiedad distributiva

$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

Los números naturales *N*, *no* tienen estructura de grupo, porque no cumplen la propiedad del simétrico. Por ello, su capacidad operativa es escasa, ya que no es posible la resta entre tales números.

Los enteros *Z*, tienen estructura de grupo pero no de cuerpo, ya que no es entero el simétrico multiplicativo de cualquier entero no nulo.

Los reales R, tienen estructura de cuerpo. Y no obstante la potencia de su capacidad operativa, resulta insuficiente para tratar los modelos lineales. De aquí la importancia de los espacios vectoriales.

8.3 Espacio Vectorial (EV)

Un espacio vectorial es una estructura matemática formada por un conjunto *V*, y dos operaciones suma (+) y producto $(\cdot)$ tal que, para todos los *vectores u, v* y *w* y los escalares *c* y *d*, se verifican (cumplen) las propiedades siguientes:

1. Propiedad de cerradura (para la suma)

$u+v$ está en *V*

2. Propiedad asociativa

$(u+v)+w=u+(v+w)$

3. Propiedad conmutativa

$u+v=v+u$

4. Elemento neutro (vector cero)

$u+0=0+u=u$

5. Elemento simétrico

$u + (-u) = 0$

6. Propiedad de cerradura (para cv)

cv está en V

7. Propiedad distributiva (izquierda)

$c \cdot (u + v) = c \cdot u + c \cdot v$

8. Propiedad distributiva (derecha)

$(c + d) \cdot u = c \cdot u + d \cdot u$

9. Propiedad asociativa

$c \cdot (d \cdot u) = (c \cdot d) \cdot u$

10. Elemento neutro

$1 \cdot u = u \cdot 1 = u$

Como una consecuencia directa de la definición de espacio vectorial, surgen las propiedades siguientes:

1. $0 \cdot u = 0$
2. $c \cdot 0 = 0$
3. $-u = (-1) \cdot u$
4. Si $c \cdot u = 0 \Rightarrow c = 0 \;\; o \;\; u = 0$

8.4 Conceptos Específicos del EV

En todo *EV* hay *conceptos específicos* que surgen de las relaciones entre los vectores y los escalares. Estos conceptos permiten interpretar los modelos lineales como un problema entre vectores, así como, establecer procedimientos para indagar la existencia y unicidad de soluciones.

a) *Combinación lineal*

Dados los vectores $v_1, \; v_2, \; \cdots, \; v_p \;\; en \;\; R^n$ y los escalares $c_1, \; c_2, \; \cdots, \; c_p$, el vector *y*, definido como $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_p v_p$, se llama ***combinación lineal*** (***c.l.***) de $v_1, \; v_2, \; \cdots, \; v_p$, con pesos $c_1, \; c_2, \; \cdots, \; c_p$

Ejemplo

Dados $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

Determinar si *b* es una *c.l.* de v_1 y v_2, es decir, si $x_1 v_1 + x_2 v_2 = b$

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ -5x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 5x_2 \\ 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \\ -5x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 7 \\ -2x_1 + 5x_2 &= 4 \\ -5x_1 + 6x_2 &= -3 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema por la *FE*, se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Y la solución es $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$

Por lo tanto, el vector *b* es una *c.l.* de v_1 y v_2, con pesos $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$

Es decir, $3v_1 + 2v_2 = b$

Del análisis anterior se puede establecer el hecho siguiente:

La ecuación vectorial $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p = b$, tiene el mismo conjunto solución que el sistema lineal cuya matriz aumentada es $[v_1 \;\; v_2 \;\; \cdots \;\; v_n \;\; b]$

En particular, b es una *c.l.* de $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_p$, si y solo si, existe una solución de dicho sistema lineal.

b) *Subespacio de R^n*

Una de las ideas básicas del álgebra lineal es, determinar el conjunto de todos los vectores que se puedan generar como *c.l.* de un conjunto de vectores fijo $\{v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_p\}$.

<u>Definición</u>. Si $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_p$ están en R^n, entonces el conjunto de todas las *c.l.* de $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_p$, denotado por $Gen\{v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_p\}$, se denomina *subespacio de R^n* generado por $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_p$.

Esto es, $Gen\{v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_p\}$ es el conjunto de todos los vectores que se pueden escribir en la forma

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_pv_p, \text{ con } c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_p \text{ escalares.}$$

Preguntarse si un vector b está en $Gen\{v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_p\}$, equivale a preguntarse si la ecuación vectorial $x_1v_1 + x_2v_2 + \ \cdots\ + x_pv_p = b$ tiene una solución, o si el sistema lineal representado por la matriz aumentada $[v_1\ \ v_2\ \ \cdots\ \ v_n\ \ b]$ tiene solución.

c) *Ecuación matricial*

Una idea fundamental del álgebra lineal es, expresar una *c.l.* de vectores como el producto de una matriz y un vector.

Ejemplos

1) La *c.l.* $3v_1 - 5v_2 + 2v_3 = [v_1\quad v_2\quad v_3]\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} = Ax$

2) El *SEL* $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ \quad -5x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$, implica la *c.l.* de vectores siguiente

$$x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El planteamiento formal se establece en el teorema siguiente:

Teorema

Si A es una matriz $m \times n$, con columnas $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ y si b está en R^m, la ecuación matricial $Ax = b$, tiene el mismo conjunto solución que la ecuación vectorial dada por $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ \cdots\ + x_p a_p = b$, la cual, a su vez, tiene el mismo conjunto solución que el *SEL* cuya matriz aumentada es $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & b \end{bmatrix}$.

Las tres versiones: la ecuación matricial, la ecuación vectorial y el *SEL*, se resuelven de la misma manera, *reduciendo por filas la matriz aumentada*.

Una consecuencia directa del teorema anterior, es el enunciado siguiente:

La ecuación $Ax = b$ tiene una solución, si y solo si, b es una *c.l.* de las columnas de A.

Se dice que las columnas de A generan R^m, si todo b en R^m es una *c.l.* de las columnas de A.

En general, un conjunto de vectores $\{v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_p\}$ en R^m genera R^m, si todo vector en R^m es una *c.l.* de $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_p$, esto es, si $Gen\{v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_p\} = R^m$

En el teorema siguiente se resumen tres ideas fundamentales

Teorema

Si A es una matriz $m \times n$, entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes. Es decir, para una A específica, o todas son verdaderas o todas son falsas:

1. Para todo b en R^m $Ax = b$ tiene una solución
2. Las columnas de A generan R^m
3. A tiene un pivote en cada fila

d) *Independencia lineal*

Los *SEL homogéneos*, se pueden estudiar como *c.l.* de vectores en una ecuación vectorial.

<u>*Definición*</u>. Un conjunto indizado de vectores $\{v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_p\}$ en R^n es *linealmente independiente* si la ecuación vectorial $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ \cdots\ + x_p v_p = 0$ tiene únicamente la solución trivial, y $\{v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_p\}$ será *linealmente dependiente* si existen pesos $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_p$, no todos cero, tales que $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ \cdots\ + c_p v_p = 0$

Ejemplo

Dados $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ y $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Determinar si $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ es linealmente independiente.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Y la solución es $\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 \ \ \textit{libre} \end{cases}$

Así, si $x_3 = 1$, entonces $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ y $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$

Por lo tanto, $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ es linealmente *dependiente*.

Se tiene así el siguiente hecho importante:

Las columnas de una matriz serán *linealmente independientes*, si y solo si, la ecuación $Ax = 0$ tiene únicamente la solución trivial.

Ejemplo

Determinar si las columnas de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$, son linealmente independientes

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \end{bmatrix}$$

Como no existen variables libres, la ecuación $Ax = 0$ tiene únicamente la solución trivial y las columnas de A son *linealmente independientes*.

9. BIBLIOGRAFÍA

1. Aleksandrov, A. *et al*. (1980). *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Tomo II. Alianza Editorial. España.
2. Anton, H. (2003). *Álgebra lineal*. Editorial Limusa Wiley. México.
3. De Burgos, J. (2006). *Álgebra lineal y geometría cartesiana*. Editorial McGraw-Hill. España.
4. Dowling, E. (1982). *Matemáticas para economistas*. Editorial McGraw-Hill. México.
5. Gamboa, J. (2003). *Álgebra matricial*. Editorial Anaya. España.
6. Grossman, S. I. (1987). *Álgebra lineal*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
7. Lay, D. (2001). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Editorial Pearson, Prentice Hall. México.
8. Prawda, J. (1991). *Métodos y modelos de investigación de operaciones (Tomo I)*. Editorial Limusa. México.

REVISORES:

Abel Valdez Ramírez. IPN

José Enrique Pérez Aguilera. IPN

Oscar Galindo Tijerina. UACh

CÁLCULO UNIVARIADO Y ÁLGEBRA LINEAL

Se imprimió en la Imprenta Universitaria de la UACh

Km 38.5 carretera México-Texcoco

Chapingo, Texcoco, Estado de México, CP 56230

Tel: 01(595) 95 21500 ext. 5142

En el mes de Abril de 2012

Tipo de papel, bond cultural de 60 Kgs.

Tipografía Times New Roman

La edición consta de 500 ejemplares.