

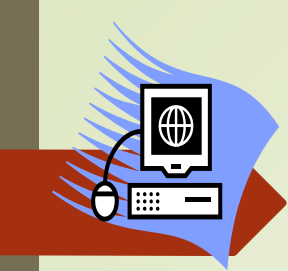


Universidad Autónoma Chapingo
Dpto. de Preparatoria Agrícola
Área de Física



“Tiro Parabólico”

Agosto del 2023



Tiro Parabólico

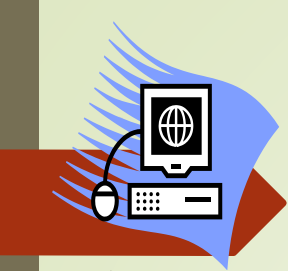
El movimiento de un cuerpo en una superficie plana es un movimiento en dos dimensiones.

En consecuencia, para localizar un cuerpo se requieren, en general, dos coordenadas.

Los proyectiles son un ejemplo de movimiento en dos dimensiones.

Se llama proyectil a cualquier objeto que es lanzado por algún agente y que continúa en movimiento en virtud de su propia inercia, siguiendo una trayectoria determinada por la fuerza gravitacional que actúa sobre él.

Una bala disparada por un cañón, una piedra lanzada al aire o una pelota que cae al abandonar el bordo de una mesa, son casos particulares de proyectiles.



Tiro Parabólico

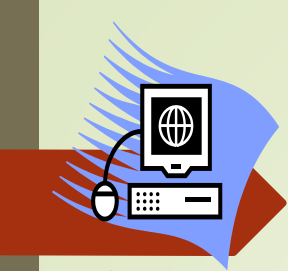
El camino seguido por un proyectil se denomina trayectoria.

Los proyectiles describen trayectorias curvilíneas, las cuales pueden descomponerse en una componente horizontal y en otra vertical.

En la dirección horizontal el proyectil se mueve con velocidad constante, recorriendo distancias iguales en iguales intervalos de tiempo.

No hay aceleración en la dirección horizontal del movimiento. De esta forma, en la dirección horizontal el movimiento es rectilíneo uniforme.

En cambio, en la dirección vertical, la velocidad sufre cambios, es decir, por la presencia de la gravedad de la tierra, el objeto experimenta una aceleración en la dirección vertical.



Tiro Parabólico

Es interesante mencionar que la componente horizontal del movimiento de un proyectil es totalmente independiente de la componente vertical.

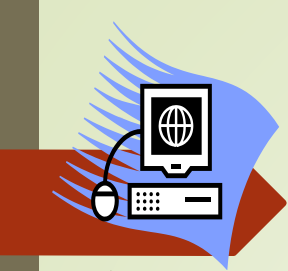
Cada una de ellas actúa de manera independiente.

Sus efectos combinados producen toda la gama de trayectorias curvas que describen los proyectiles.

Por ello, la trayectoria de un proyectil se puede analizar considerando por separado su componente horizontal y vertical.

La trayectoria que describe un proyectil que sólo se acelera en la dirección vertical, moviéndose con velocidad horizontal constante, se llama parábola.

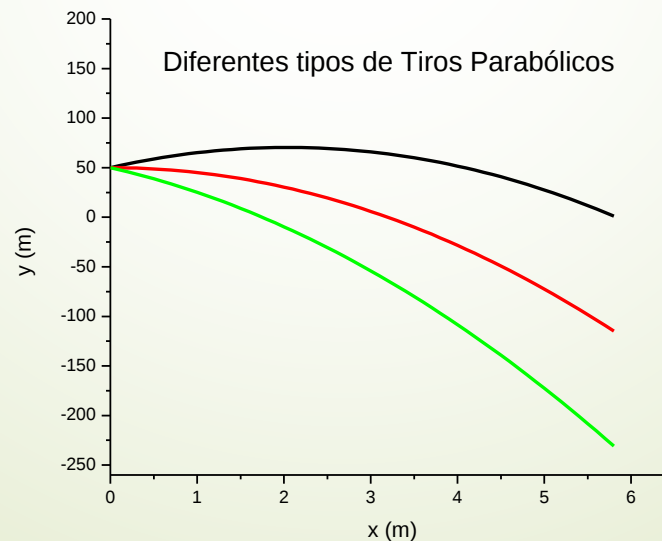
Cuando no es posible despreciar la resistencia del aire, las trayectorias no son parabólicas.

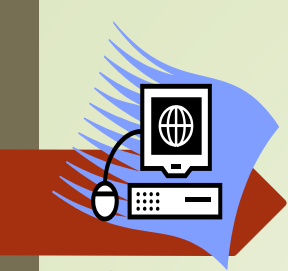


Tiro Parabólico

Supondremos que podemos ignorar el efecto que produce el aire en estos movimientos.

En el tiro parabólico la velocidad en la dirección horizontal de la trayectoria seguida por el proyectil es constante, por lo que el movimiento en esta dirección puede ser descrito completamente por las ecuaciones correspondientes al Movimiento Rectilíneo Uniforme.





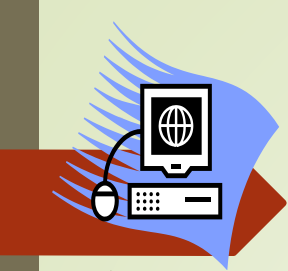
Tiro Parabólico

En el Tiro Parabólico el proyectil en la dirección horizontal recorre iguales distancias en tiempos iguales y en la dirección vertical la distancia que recorre es diferente para iguales incrementos de tiempo, debido a que la velocidad cambia.

En consecuencia, el movimiento en la dirección horizontal corresponde a un movimiento rectilíneo uniforme, mientras que en la dirección vertical se tiene un movimiento rectilíneo uniformemente variado. De esta forma, la posición en la dirección horizontal se describe por medio de la siguiente ecuación:

$$x = x_0 + v_x t$$

donde: x_0 es la posición horizontal del cuerpo al instante en que activa el cronómetro, a esta posición se le conoce con el nombre de posición inicial; x es la posición horizontal del cuerpo al instante t y se le conoce como posición horizontal final; v_x es la velocidad del proyectil en la dirección horizontal, la cuál se considera constante.

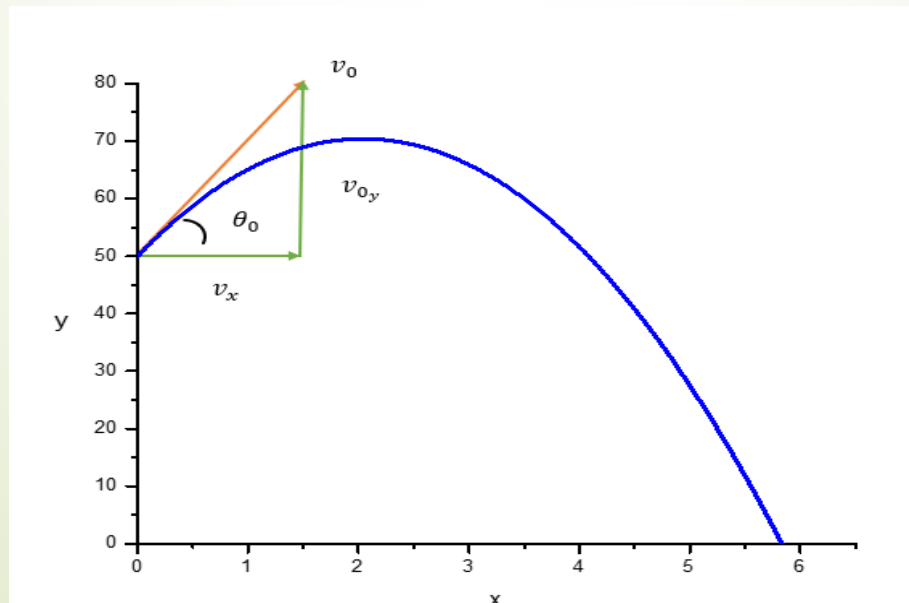


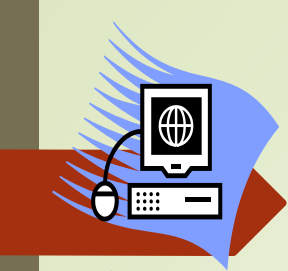
Tiro Parabólico

Asimismo, la velocidad del cuerpo en la dirección horizontal está dada por la siguiente ecuación:

$$v_x = v_0 \cos \theta_0$$

donde: v_0 y θ_0 son la rapidez y el ángulo inicial con el que es disparado el proyectil, respectivamente.





Tiro Parabólico

De igual forma, en la dirección vertical, el movimiento del proyectil es con aceleración constante por lo que su posición y velocidad pueden ser descritas a través de las ecuaciones correspondientes al Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado. Las ecuaciones para la posición vertical son:

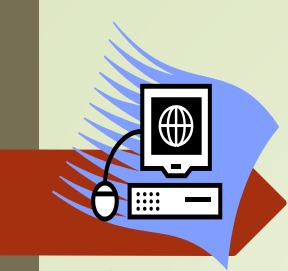
$$t = \frac{v_y - v_{0y}}{g} \quad y = y_0 + v_{0y}t + g t^2 / 2 \quad y = y_0 + \left(\frac{v_y + v_{0y}}{2} \right) t$$

$$y = y_0 - v_y t + g t^2 / 2 \quad y = y_0 + \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2 g}$$

Donde: y Es la posición del cuerpo al instante t , y_0 Es la posición inicial,

v_y Es la velocidad del cuerpo en el instante t , v_{0y} Es la velocidad inicial,

g Es la aceleración de la gravedad y t Es el tiempo de movimiento.



Tiro Parabólico

La velocidad vertical inicial está dada por la siguiente relación:

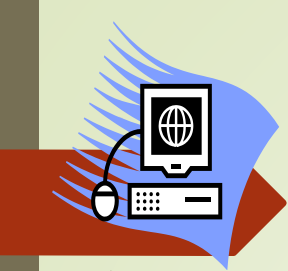
$$v_{0y} = v_0 \text{ sen } \theta_0$$

donde: v_0 y θ_0 son la rapidez y el ángulo inicial con el que es disparado el proyectil, respectivamente.

La velocidad vertical final puede ser calculada por medio de la ecuación:

$$v_y = v \text{ sen } \theta$$

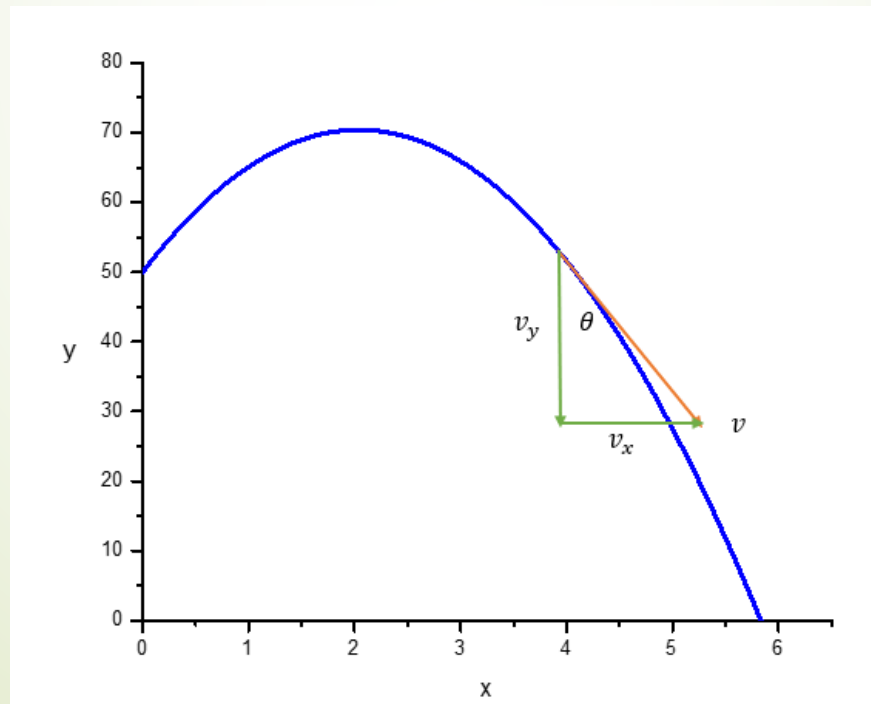
donde: v y θ son la rapidez y el ángulo con el que se desplaza el proyectil al instante t . De igual forma esta velocidad está expresada en función del tiempo a través de la siguiente igualdad:

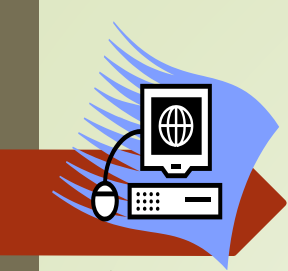


Tiro Parabólico

$$v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 + gt$$

Por medio de esta ecuación podremos calcular la velocidad del proyectil en la dirección vertical con sólo conocer el tiempo de vuelo, al igual que la rapidez y ángulo inicial.





Tiro Parabólico

La rapidez v_0 del proyectil es la rapidez del cuerpo en el momento de accionar el cronómetro y se le conoce como rapidez inicial que es igual a la magnitud de la velocidad inicial, es decir:

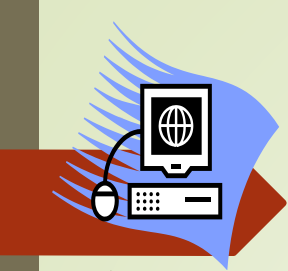
$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_{0y}^2}$$

y el ángulo θ_0 que forma la velocidad inicial con la horizontal en dicho instante está dado por:

$$\tan \theta_0 = \frac{v_{0y}}{v_x}$$

La rapidez v del proyectil al instante t o rapidez final es igual a la magnitud del vector velocidad, es decir:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$



Tiro Parabólico

y el ángulo θ que forma el vector velocidad con la horizontal en dicho instante está dado por:

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x}$$



Tiro Parabólico

Ejemplo 1:

Un proyectil es lanzado con una rapidez inicial de $v_0 = 40 \text{ m/s}$, formando un ángulo de $\theta_0 = 60^\circ$. Calcule: a) El tiempo que tarda en llegar a la altura máxima, b) La altura máxima, c) El tiempo que tarda en llegar al suelo, d) La rapidez con la que llega al suelo y e) El alcance. Haga una gráfica que represente la trayectoria del proyectil.

Solución:

Las velocidades iniciales tanto horizontal como vertical se calculan por medio de las siguientes ecuaciones:

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = (40 \text{ m/s}) \cos 60^\circ = (40 \text{ m/s}) * (0.5) = 20 \text{ m/s}$$

y

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0 = (40 \text{ m/s}) \sin 60^\circ = (40 \text{ m/s}) * (0.8660) = 34.64 \text{ m/s}$$



Tiro Parabólico

Ejemplo 1:

Para conocer el tiempo que tarda en llegar el proyectil a la altura máxima se debe suponer que la velocidad final vertical es igual a cero, es decir $v_y = 0$. En consecuencia:

$$t = \frac{v_y - v_{0y}}{g} = \frac{0 - 34.64 \text{ m/s}}{-9.8 \text{ m/s}^2} = 3.534 \text{ s}$$

Para calcular la altura máxima se utiliza la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} y_{\text{máx}} &= y_0 + v_{0y}t + g t^2 / 2 \\ &= 0 + (34.64 \text{ m/s})(3.534 \text{ s}) + (-9.8 \text{ m/s}^2)(3.534 \text{ s})^2 / 2 \end{aligned}$$

Es decir:

$$y_{\text{máx}} = 122.42 \text{ m} - 61.22 \text{ m} = 61.20 \text{ m}$$



Tiro Parabólico

Ejemplo 1:

La distancia recorrida en el momento de alcanzar la altura máxima es igual a:

$$x = x_0 + v_x t = 0 + (20 \text{ m/s})(3.534 \text{ s}) = 70.69 \text{ m}$$

Para conocer el tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo, es necesario suponer que la posición vertical final del cuerpo en el suelo es cero. Con esta suposición, utilizaremos la ecuación siguiente:

$$y = y_0 + v_{0y} t + g t^2 / 2 = 0 + (34.64 \text{ m/s}) t + (-9.8 \text{ m/s}^2) t^2 / 2 = 0$$

Sacando factor común:

$$t (34.64 \text{ m/s} + (-9.8 \text{ m/s}^2) t / 2) = 0$$

Por lo que:

$$t = \frac{-2 \left(34.64 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)}{-9.8 \text{ m/s}^2} = \frac{-69.28 \text{ m/s}}{-9.8 \text{ m/s}^2} = 7.07 \text{ s}$$

Que corresponde al tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo.



Tiro Parabólico

Ejemplo 1:

Para calcular la velocidad vertical con la que llega el proyectil al suelo, debemos utilizar el tiempo que hemos calculado anteriormente, en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}v_y &= v_{0_y} + g t = 34.64 \text{ m/s} - 9.8 \text{ m/s}^2 * 7.07 \text{ s} \\&= 34.64 \text{ m/s} - 69.28 \text{ m/s} = -34.64 \text{ m/s}\end{aligned}$$

En consecuencia, la rapidez final es igual a:

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(20 \text{ m/s})^2 + (-34.64 \text{ m/s})^2} \\&= \sqrt{400 \text{ m}^2/\text{s}^2 + 1199.93 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 40 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Observe que es la misma rapidez con la que fue lanzado porque se encuentra a la misma altura con la que fue lanzado.



Tiro Parabólico

Ejemplo 1:

El ángulo con el que llega al suelo se puede calcular por medio de la siguiente ecuación:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-34.64 \text{ m/s}}{20 \text{ m/s}} \right) = -60^\circ$$

Observe también que este ángulo corresponde al ángulo con que fue lanzado. Este resultado es válido cuando el proyectil se encuentra a la misma altura a la que fue lanzado, es decir, si la altura es diferente, la velocidad y el ángulo será diferente al ángulo y velocidad con el que fue lanzado. A iguales alturas, iguales velocidades y ángulos.

El alcance logrado por el proyectil es igual al producto de la velocidad horizontal por el tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo, es decir:

$$R = x - x_0 = v_x t = (20 \text{ m/s}) * (7.07 \text{ s}) = 141.4 \text{ m}$$

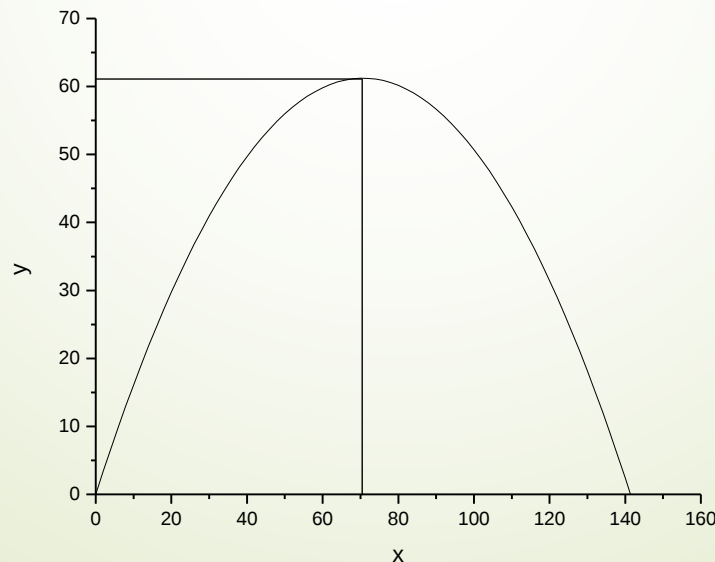


Tiro Parabólico

Ejemplo 1:

La gráfica siguiente muestra la trayectoria del proyectil. Observe en la gráfica que el alcance y la altura máxima corresponde con los valores obtenidos teóricamente. De igual forma se observa que la distancia recorrida por el proyectil al alcanzar la altura máxima es igual a la mitad del alcance.

Gráfica de la trayectoria del proyectil.





Tiro Parabólico

Ejercicio 1:

Un proyectil es lanzado con una rapidez inicial de $v_0 = 60 \text{ m/s}$, formando un ángulo de $\theta_0 = 30^\circ$. Calcule: a) El tiempo que tarda en llegar a la altura máxima, b) La altura máxima, c) El tiempo que tarda en llegar al suelo, d) La rapidez con la que llega al suelo y e) El alcance. Haga una gráfica que represente la trayectoria del proyectil y una gráfica de la posición vertical y horizontal en función del tiempo.

Solución:

Las velocidades iniciales tanto horizontal como vertical se calculan por medio de las siguientes ecuaciones:

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = (60 \text{ m/s}) \cos 30^\circ = (60 \text{ m/s}) * (0.8660) = 51.96 \text{ m/s}$$

y

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0 = (60 \text{ m/s}) \sin 30^\circ = (60 \text{ m/s}) * (0.5) = 30 \text{ m/s}$$



Tiro Parabólico

Ejercicio 1:

Para conocer el tiempo que tarda en llegar el proyectil a la altura máxima se debe suponer que la velocidad final vertical es igual a cero, es decir $v_y = 0$. En consecuencia:

$$t = \frac{v_y - v_{0y}}{g} = \frac{0 - 30 \text{ m/s}}{-9.8 \text{ m/s}^2} = 3.06 \text{ s}$$

Para calcular la altura máxima se utiliza el tiempo calculado para alcanzarla y sustituyéndolo en la siguiente ecuación:

$$y_{\text{máx}} = y_0 + v_{0y}t + g t^2 / 2$$

$$= 0 + (30 \text{ m/s})(3.06 \text{ s}) + (-9.8 \text{ m/s}^2)(3.06 \text{ s})^2 / 2$$

Es decir:

$$y_{\text{máx}} = 91.84 \text{ m} - 45.92 \text{ m} = 45.92 \text{ m}$$



Tiro Parabólico

Ejercicio 1:

La distancia recorrida en el momento de alcanzar la altura máxima es igual a:

$$x = x_0 + v_x t = 0 + (51.96 \text{ m/s})(3.06 \text{ s}) = 159.06 \text{ m}$$

Para conocer el tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo, es necesario suponer que la posición vertical final del cuerpo en el suelo es cero. Con esta suposición, utilizaremos la ecuación siguiente:

$$y = y_0 + v_{0y} t + g t^2 / 2 = 0 + (30 \text{ m/s}) t + (-9.8 \text{ m/s}^2) t^2 / 2 = 0$$

Sacando factor común:

$$t (30 \text{ m/s} + (-9.8 \text{ m/s}^2) t / 2) = 0$$

Por lo que:

$$t = \frac{-2 \left(30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)}{-9.8 \text{ m/s}^2} = \frac{-60 \text{ m/s}}{-9.8 \text{ m/s}^2} = 6.12 \text{ s}$$

Que corresponde al tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo.



Tiro Parabólico

Ejercicio 1:

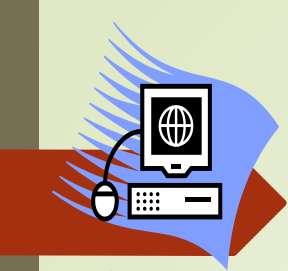
Para calcular la velocidad vertical con la que llega el proyectil al suelo, debemos utilizar el tiempo que hemos calculado anteriormente, en la siguiente ecuación:

$$v_y = v_{0y} + g t = 30 \text{ m/s} - 9.8 \text{ m/s}^2 * 6.12 \text{ s} = 30 \text{ m/s} - 60 \text{ m/s} \\ = -30 \text{ m/s}$$

En consecuencia, la rapidez final es igual a:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(51.96 \text{ m/s})^2 + (-30 \text{ m/s})^2} \\ = \sqrt{2699.84 \text{ m}^2/\text{s}^2 + 900 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 60 \text{ m/s}$$

Observe que es la misma rapidez con la que fue lanzado porque se encuentra a la misma altura a la que fue lanzado.



Tiro Parabólico

Ejercicio 1:

El ángulo con el que llega al suelo se puede calcular por medio de la siguiente ecuación:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-30 \text{ m/s}}{51.96 \text{ m/s}} \right) = -30^\circ$$

Observe también que este ángulo corresponde al ángulo con que fue lanzado. Este resultado es válido cuando el proyectil se encuentra a la misma altura a la que fue lanzado, es decir, si la altura es diferente, la velocidad y el ángulo será diferente al ángulo y velocidad con el que fue lanzado. A iguales alturas, iguales velocidades y ángulos.

El alcance logrado por el proyectil es igual al producto de la velocidad horizontal por el tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo, es decir:

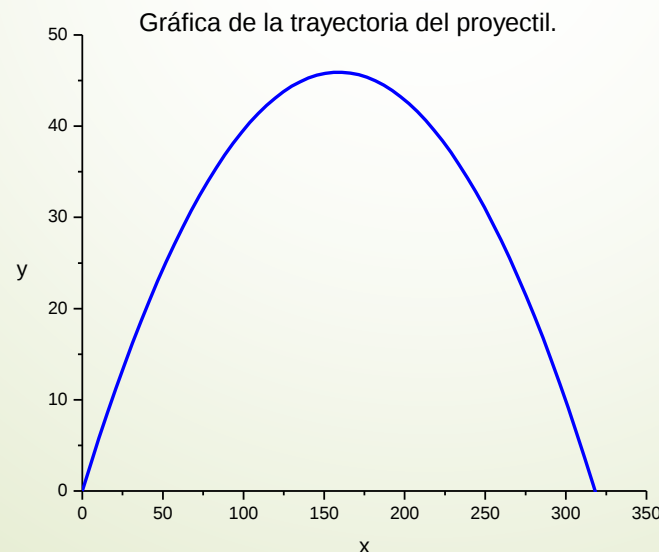
$$R = x - x_0 = v_x t = (51.96 \text{ m/s}) * (6.12 \text{ s}) = 318.124 \text{ m}$$

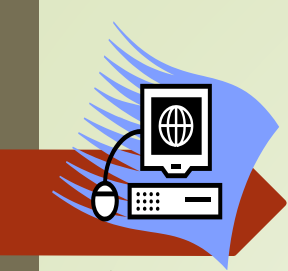


Tiro Parabólico

Ejercicio 1:

La gráfica siguiente muestra la trayectoria del proyectil. Observe en la gráfica que el alcance y la altura máxima corresponde con los valores obtenidos teóricamente. De igual forma se observa que la distancia recorrida por el proyectil al alcanzar la altura máxima es igual a la mitad del alcance.





Tiro Parabólico

Ejemplo 2:

Desde un edificio de 50 metros de altura, un proyectil es lanzado con una rapidez inicial de $v_0 = 40 \text{ m/s}$, formando un ángulo de $\theta_0 = 60^\circ$. Calcule: a) El tiempo que tarda en llegar a la altura máxima, b) La altura máxima, c) El tiempo que tarda en llegar al suelo, d) La velocidad con la que llega al suelo y e) El alcance. Haga una gráfica que represente la trayectoria del proyectil.

Solución:

Las velocidades iniciales tanto horizontal como vertical se calculan por medio de las siguientes ecuaciones:

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = (40 \text{ m/s}) \cos 60^\circ = (40 \text{ m/s}) * (0.5) = 20 \text{ m/s}$$

y

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0 = (40 \text{ m/s}) \sin 60^\circ = (40 \text{ m/s}) * (0.8660) = 34.64 \text{ m/s}$$



Tiro Parabólico

Ejemplo 2:

Para conocer el tiempo que tarda en llegar el proyectil a la altura máxima se debe suponer que la velocidad final vertical es igual a cero, es decir $v_y = 0$. En consecuencia:

$$t = \frac{v_y - v_{0y}}{g} = \frac{0 - 34.64 \text{ m/s}}{-9.8 \text{ m/s}^2} = 3.53 \text{ s}$$

Para calcular la altura máxima se utiliza el tiempo utilizado para alcanzarla y la siguiente ecuación:

$$y_{\text{máx}} = y_0 + v_{0y}t + g t^2 / 2$$

$$= 50 \text{ m} + (34.64 \text{ m/s})(3.53 \text{ s}) + (-9.8 \text{ m/s}^2)(3.53 \text{ s})^2 / 2$$

Es decir:

$$y_{\text{máx}} = 172.42 \text{ m} - 61.2 \text{ m} = 111.22 \text{ m}$$



Tiro Parabólico

Ejemplo 2:

La distancia recorrida en el momento de alcanzar la altura máxima es igual a:

$$d = |x - x_0| = |v_x t| = |(20 \text{ m/s})(3.53 \text{ s})| = 70.69 \text{ m}$$

Para conocer el tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo, es necesario suponer que la posición vertical final del cuerpo en el suelo es cero. Con esta suposición, utilizaremos la ecuación siguiente:

$$y = y_0 + v_{0y}t + g t^2/2 = 50 \text{ m} + (34.64 \text{ m/s}) t + (-9.8 \text{ m/s}^2) t^2/2 = 0$$

$$\text{Reordenando términos: } (-4.9 \text{ m/s}^2) t^2 + (34.64 \text{ m/s}) t + 50 \text{ m} = 0$$

Por lo que esta ecuación se resuelve con la fórmula general:

$$t = \frac{-34.64 \text{ m/s} \pm \sqrt{(34.64 \text{ m/s})^2 - 4 * (-4.9 \text{ m/s}^2) * (50 \text{ m})}}{2 * (-4.9 \text{ m/s}^2)}$$

$$= \frac{-34.64 \text{ m/s} \pm 46.69 \text{ m/s}}{-9.8 \text{ m/s}^2}$$



Tiro Parabólico

Ejemplo 2:

Es decir:

$$t = \frac{-34.64 \text{ m/s} - 46.69 \text{ m/s}}{-9.8 \text{ m/s}^2} = \frac{-81.33 \text{ m/s}}{-9.8 \text{ m/s}^2} = 8.299 \text{ s}$$

Que corresponde al tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo.

Para calcular la velocidad vertical final con la que llega el proyectil al suelo, debemos utilizar el tiempo que hemos calculado anteriormente y sustituirlo en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} + g t = 34.64 \text{ m/s} - 9.8 \text{ m/s}^2 * 8.299 \text{ s} \\ &= 34.64 \text{ m/s} - 81.33 \text{ m/s} = -46.69 \text{ m/s} \end{aligned}$$

En consecuencia, la rapidez final es igual a:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(20 \text{ m/s})^2 + (-46.69 \text{ m/s})^2} \\ &= \sqrt{400 \text{ m}^2/\text{s}^2 + 2179.96 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 50.79 \text{ m/s} \end{aligned}$$



Tiro Parabólico

Ejemplo 2:

El ángulo con el que llega al suelo se puede calcular por medio de la siguiente ecuación:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-46.69 \text{ m/s}}{20 \text{ m/s}} \right) = -68.07^\circ$$

El alcance logrado por el proyectil es igual al producto de la velocidad horizontal por el tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo, es decir:

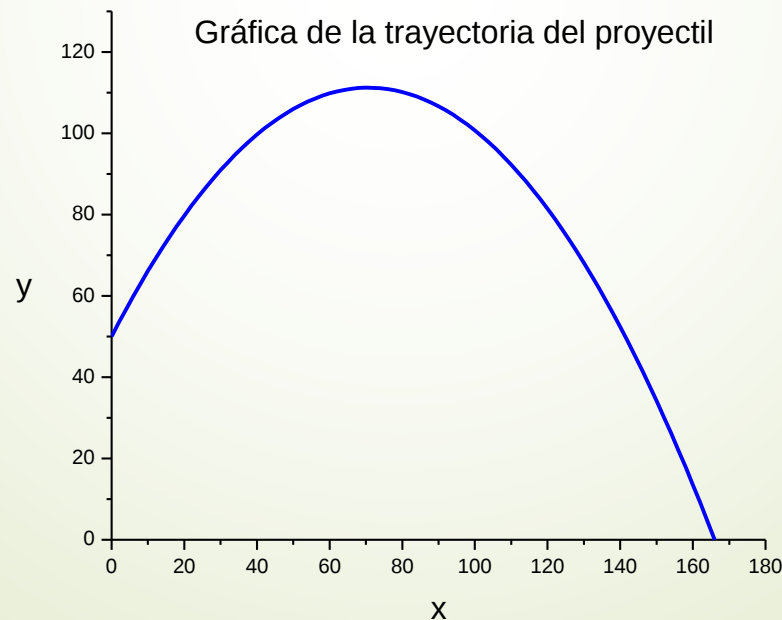
$$R = |x - x_0| = |v_x t| = |(20 \text{ m/s}) * (8.299 \text{ s})| = 165.95 \text{ m}$$



Tiro Parabólico

Ejemplo 2:

La gráfica siguiente muestra la trayectoria del proyectil. Observe en la gráfica que el alcance y la altura máxima corresponde con los valores obtenidos teóricamente.





Tiro Parabólico

Ejercicio 2:

Desde un edificio de 40 metros de altura, un proyectil es lanzado con una rapidez inicial de $v_0 = 50 \text{ m/s}$, formando un ángulo de $\theta_0 = 40^\circ$. Calcule: a) El tiempo que tarda en llegar a la altura máxima, b) La altura máxima, c) El tiempo que tarda en llegar al suelo, d) La velocidad con la que llega al suelo y d) El alcance. Haga una gráfica que represente la trayectoria del proyectil y una gráfica de la posición vertical y horizontal en función del tiempo.

Solución:

Las velocidades iniciales tanto horizontal como vertical se calculan por medio de las siguientes ecuaciones:

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = (50 \text{ m/s}) \cos 40^\circ = (50 \text{ m/s}) * (0.7660) = 38.30 \text{ m/s}$$

y

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0 = (50 \text{ m/s}) \sin 40^\circ = (50 \text{ m/s}) * (0.6428) = 32.14 \text{ m/s}$$



Tiro Parabólico

Ejercicio 2:

Para conocer el tiempo que tarda en llegar el proyectil a la altura máxima se debe suponer que la velocidad final vertical es igual a cero, es decir $v_y = 0$. En consecuencia:

$$t = \frac{v_y - v_{0y}}{g} = \frac{0 - 32.14 \text{ m/s}}{-9.8 \text{ m/s}^2} = 3.28 \text{ s}$$

Para calcular la altura máxima se utiliza el tiempo utilizado para alcanzarla y haciendo uso de la siguiente ecuación:

$$y_{\text{máx}} = y_0 + v_{0y}t + g t^2 / 2$$

$$= 40 \text{ m} + (32.14 \text{ m/s})(3.28 \text{ s}) + (-9.8 \text{ m/s}^2)(3.28 \text{ s})^2 / 2$$

Es decir:

$$y_{\text{máx}} = 40 \text{ m} + 105.40 \text{ m} - 52.70 \text{ m} = 92.70 \text{ m}$$



Tiro Parabólico

Ejercicio 2:

La distancia recorrida en el momento de alcanzar la altura máxima es igual a:

$$d = |x - x_0| = |v_x t| = |(38.30 \text{ m/s})(3.28 \text{ s})| = 125.61 \text{ m}$$

Para conocer el tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo, es necesario suponer que la posición vertical final del cuerpo en el suelo es cero. Con esta suposición, utilizaremos la ecuación siguiente:

$$y = y_0 + v_{0y} t + g t^2 / 2 = 40 \text{ m} + (32.14 \text{ m/s}) t + (-9.8 \text{ m/s}^2) t^2 / 2 = 0$$

Reordenando términos: $(-4.9 \text{ m/s}^2) t^2 + (32.14 \text{ m/s}) t + 40 \text{ m} = 0$

Por lo que esta ecuación se resuelve con la fórmula general:

$$t = \frac{-32.14 \text{ m/s} \pm \sqrt{(32.14 \text{ m/s})^2 - 4 * (-4.9 \text{ m/s}^2) * (40 \text{ m})}}{2 * (-4.9 \text{ m/s}^2)}$$



Tiro Parabólico

Ejercicio 2:

Es decir:

$$t = \frac{-32.14 \text{ m/s} - 42.63 \text{ m/s}}{-9.8 \text{ m/s}^2} = \frac{-74.76 \text{ m/s}}{-9.8 \text{ m/s}^2} = 7.63 \text{ s}$$

Que corresponde al tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo.

Para calcular la velocidad vertical final con la que llega el proyectil al suelo, debemos utilizar el tiempo que hemos calculado anteriormente y haciendo uso de la siguiente ecuación:

$$v_y = v_{0y} + g t = 32.14 \text{ m/s} - 9.8 \text{ m/s}^2 * 7.63 \text{ s} = -42.63 \text{ m/s}$$

En consecuencia, la rapidez final es igual a:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(38.3 \text{ m/s})^2 + (-42.63 \text{ m/s})^2} \\ &= \sqrt{1466.89 \text{ m}^2/\text{s}^2 + 3284.2 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 57.31 \text{ m/s} \end{aligned}$$



Tiro Parabólico

Ejercicio 2:

El ángulo con el que llega al suelo se puede calcular por medio de la siguiente ecuación:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-42.63 \text{ m/s}}{38.3 \text{ m/s}} \right) = -48.06^\circ$$

El alcance logrado por el proyectil es igual al producto de la velocidad horizontal por el tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo, es decir:

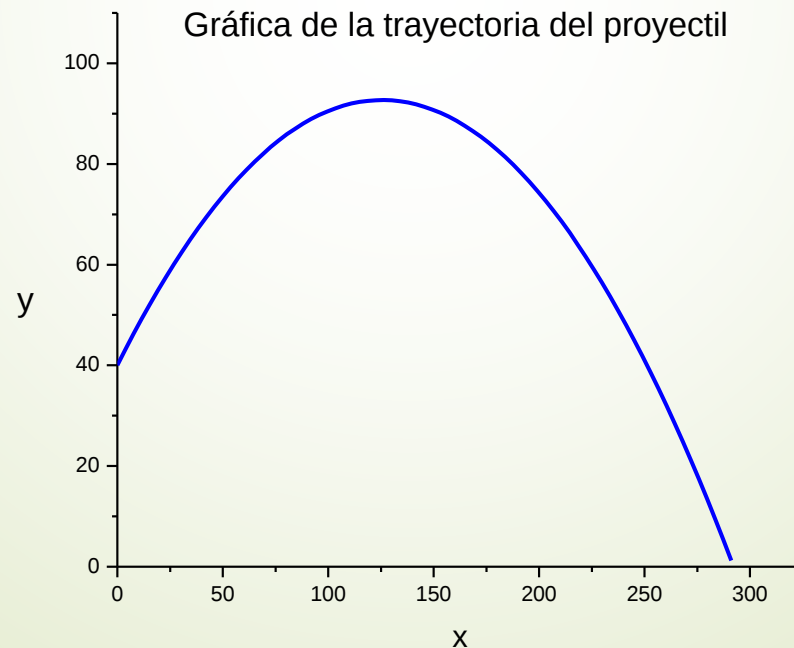
$$R = |x - x_0| = |v_x t| = |(38.3 \text{ m/s}) * (7.63 \text{ s})| = 292.20 \text{ m}$$



Tiro Parabólico

Ejemplo 2:

La gráfica siguiente muestra la trayectoria del proyectil. Observe en la gráfica que el alcance y la altura máxima corresponde con los valores obtenidos teóricamente.





Tiro Parabólico

Ejemplo 3:

Desde un edificio de 60 metros de altura, un proyectil es lanzado hacia abajo con una rapidez inicial de $v_0 = 50 \text{ m/s}$, formando un ángulo de $\theta_0 = 40^\circ$. Calcule: a) El tiempo que tarda en llegar al suelo, b) La rapidez con la que llega al suelo y c) La distancia recorrida al momento de llegar al suelo. Haga una gráfica que represente la trayectoria del proyectil

Solución:

Las velocidades iniciales tanto horizontal como vertical se calculan por medio de las siguientes ecuaciones:

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = (50 \text{ m/s}) \cos (-40^\circ) = (50 \text{ m/s}) * (0.7660) = 38.30 \text{ m/s}$$

y

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0 = (50 \text{ m/s}) \sin (-40^\circ) = (50 \text{ m/s}) * (-0.6428) = -32.14 \text{ m/s}$$



Tiro Parabólico

Ejemplo 3:

Para conocer el tiempo que tarda en llegar el proyectil al suelo se debe considerar que su posición en ese lugar es igual a cero, es decir: $y = 0$.

En consecuencia:

$$y = y_0 + v_{0y} t + g t^2 / 2 = 60 \text{ m} + (-32.14 \text{ m/s}) t + (-9.8 \text{ m/s}^2) t^2 / 2 = 0$$

Reordenando términos: $(-4.9 \text{ m/s}^2) t^2 + (-32.14 \text{ m/s}) t + 60 \text{ m} = 0$

Por lo que esta ecuación se resuelve con la fórmula general:

$$t = \frac{-(-32.14) \text{ m/s} \pm \sqrt{(-32.14 \text{ m/s})^2 - 4 * (-4.9 \text{ m/s}^2) * (60 \text{ m})}}{2 * (-4.9 \text{ m/s}^2)}$$

$$t = \frac{32.14 \text{ m/s} - 46.99 \text{ m/s}}{-9.8 \text{ m/s}^2} = \frac{-14.86 \text{ m/s}}{-9.8 \text{ m/s}^2} = 1.516 \text{ s}$$



Tiro Parabólico

Ejemplo 3:

Que corresponde al tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo.

Para calcular la velocidad vertical final con la que llega el proyectil al suelo, debemos utilizar el tiempo que hemos calculado anteriormente y haciendo uso de la siguiente ecuación:

$$v_y = v_{0y} + g t = -32.14 \text{ m/s} - (9.8 \text{ m/s}^2) (1.516 \text{ s}) = -46.99 \text{ m/s}$$

En consecuencia, la rapidez final es igual a:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(38.3 \text{ m/s})^2 + (-46.99 \text{ m/s})^2} \\ &= \sqrt{1466.89 \text{ m}^2/\text{s}^2 + 3284.2 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 60.63 \text{ m/s} \end{aligned}$$



Tiro Parabólico

Ejemplo 3:

El ángulo con el que llega al suelo se puede calcular por medio de la siguiente ecuación:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-46.99 \text{ m/s}}{38.3 \text{ m/s}} \right) = -50.82^\circ$$

El alcance logrado por el proyectil es igual al producto de la velocidad horizontal por el tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo, es decir:

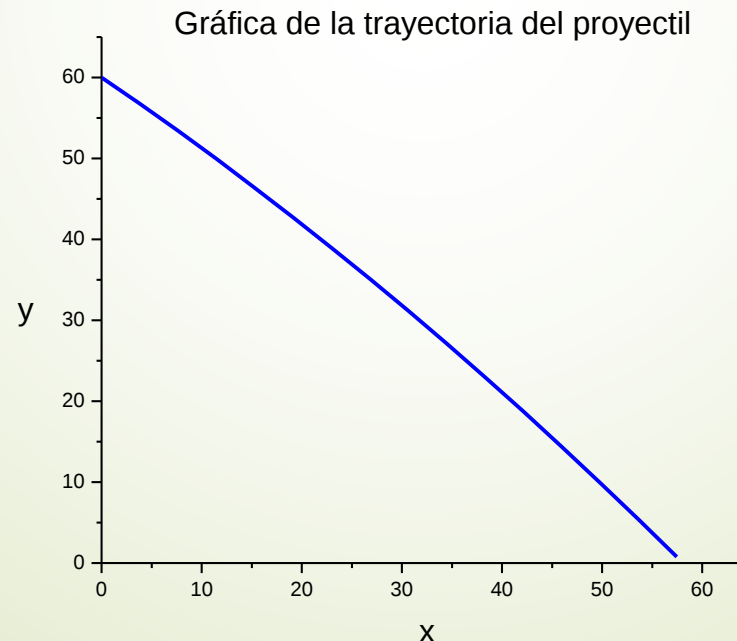
$$R = |x - x_0| = |v_x t| = |(38.3 \text{ m/s}) * (1.516 \text{ s})| = 58.06 \text{ m}$$



Tiro Parabólico

Ejemplo 3:

La gráfica siguiente muestra la trayectoria del proyectil. Observe en la gráfica que el alcance corresponde con los valores obtenidos teóricamente.





Tiro Parabólico

Ejercicio 3:

Desde un edificio de 50 metros de altura, un proyectil es lanzado hacia abajo con una rapidez inicial de $v_0 = 30 \text{ m/s}$, formando un ángulo de $\theta_0 = 60^\circ$. Calcule: a) El tiempo que tarda en llegar al suelo, b) La rapidez con la que llega al suelo y c) La distancia recorrida al momento de llegar al suelo. Haga una gráfica que represente la trayectoria del proyectil y una gráfica de la posición vertical y horizontal en función del tiempo.

Solución:

Las velocidades iniciales tanto horizontal como vertical se calculan por medio de las siguientes ecuaciones:

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = (30 \text{ m/s}) \cos (-60^\circ) = (30 \text{ m/s}) * (0.5) = 15.0 \text{ m/s}$$

y

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0 = (30 \text{ m/s}) \sin (-60^\circ) = (30 \text{ m/s}) * (-0.8660) = -25.98 \text{ m/s}$$



Tiro Parabólico

Ejercicio 3:

Para conocer el tiempo que tarda en llegar el proyectil al suelo se debe considerar que su posición en ese lugar es igual a cero, es decir: $y = 0$.

En consecuencia:

$$y = y_0 + v_{0y} t + g t^2 / 2 = 50 \text{ m} + (-25.98 \text{ m/s}) t + (-9.8 \text{ m/s}^2) t^2 / 2 = 0$$

Reordenando términos: $(-4.9 \text{ m/s}^2) t^2 + (-25.98 \text{ m/s}) t + 50 \text{ m} = 0$

Por lo que esta ecuación se resuelve con la fórmula general:

$$t = \frac{-(-25.98) \text{ m/s} \pm \sqrt{(-25.98 \text{ m/s})^2 - 4 * (-4.9 \text{ m/s}^2) * (50 \text{ m})}}{2 * (-4.9 \text{ m/s}^2)}$$

$$t = \frac{25.98 \text{ m/s} - 40.68 \text{ m/s}}{-9.8 \text{ m/s}^2} = \frac{-14.70 \text{ m/s}}{-9.8 \text{ m/s}^2} = 1.50 \text{ s}$$



Tiro Parabólico

Ejercicio 3:

Que corresponde al tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo.

Para calcular la velocidad vertical final con la que llega el proyectil al suelo, debemos utilizar el tiempo que hemos calculado anteriormente, en la siguiente ecuación:

$$v_y = v_{0y} + g t = -25.98 \text{ m/s} - (9.8 \text{ m/s}^2) (1.50 \text{ s}) = -40.68 \text{ m/s}$$

En consecuencia, la rapidez final es igual a:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(15.0 \text{ m/s})^2 + (-40.68 \text{ m/s})^2} \\ &= \sqrt{225 \text{ m}^2/\text{s}^2 + 1679.36 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 43.36 \text{ m/s} \end{aligned}$$



Tiro Parabólico

Ejercicio 3:

El ángulo con el que llega al suelo se puede calcular por medio de la siguiente ecuación:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-40.68 \text{ m/s}}{15 \text{ m/s}} \right) = -69.76^\circ$$

El alcance logrado por el proyectil es igual al producto de la velocidad horizontal por el tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo, es decir:

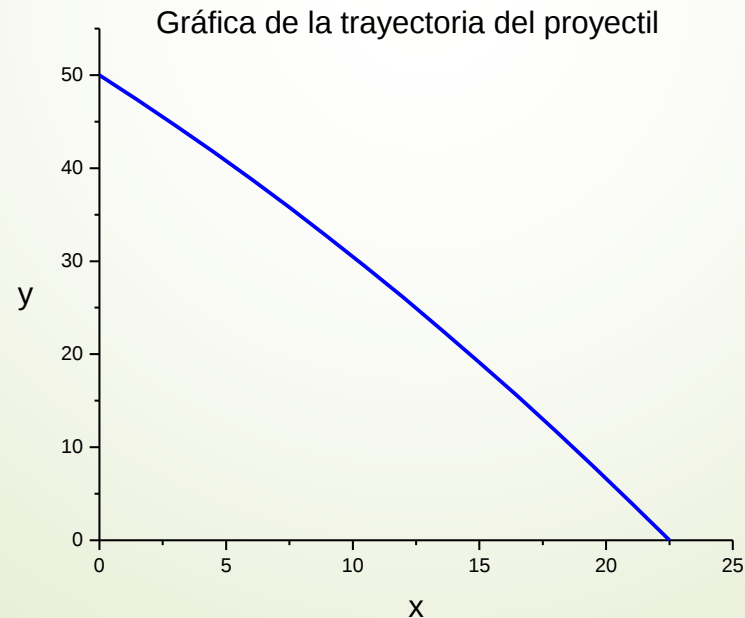
$$R = |x - x_0| = |v_x t| = |(15 \text{ m/s}) * (1.50 \text{ s})| = 22.5 \text{ m}$$



Tiro Parabólico

Ejercicio 3:

La gráfica siguiente muestra la trayectoria del proyectil. Observe en la gráfica que el alcance corresponde con los valores obtenidos teóricamente.





Tiro Parabólico

Ejemplo 4:

Desde un edificio de 40 metros de altura, un proyectil es lanzado con una rapidez inicial de $v_0 = 30 \text{ m/s}$, formando un ángulo de $\theta_0 = 0^\circ$. Calcule: a) El tiempo que tarda en llegar al suelo, b) La rapidez con la que llega al suelo y c) La distancia recorrida al momento de llegar al suelo. Haga una gráfica que represente la trayectoria del proyectil

Solución:

Las velocidades iniciales tanto horizontal como vertical se calculan por medio de las siguientes ecuaciones:

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = (30 \text{ m/s}) \cos (0^\circ) = (30 \text{ m/s}) * (1.0) = 30 \text{ m/s}$$

y

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0 = (30 \text{ m/s}) \sin (0^\circ) = (30 \text{ m/s}) * (0) = 0 \text{ m/s}$$



Tiro Parabólico

Ejemplo 4:

Para conocer el tiempo que tarda en llegar el proyectil al suelo se debe considerar que su posición en ese lugar es igual a cero, es decir: $y = 0$.

En consecuencia:

$$y = y_0 + v_{0y}t + g t^2/2 = 40 \text{ m} + (0) t + (-9.8 \text{ m/s}^2) t^2/2 = 0$$

Reordenando términos:

$$(-4.9 \text{ m/s}^2) t^2 + 40 \text{ m} = 0$$

Por lo que se tiene:

$$t = \sqrt{\frac{-40 \text{ m}}{-4.9 \text{ m/s}^2}} = \sqrt{8.16 \text{ s}^2} = 2.86 \text{ s}$$

Se debe tomar el signo positivo de la raíz debido a que el tiempo no puede ser negativo.



Tiro Parabólico

Ejemplo 4:

Que corresponde al tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo.

Para calcular la velocidad vertical final con la que llega el proyectil al suelo, debemos utilizar el tiempo que hemos calculado anteriormente y haciendo uso de la siguiente ecuación:

$$v_y = v_{0y} + g t = 0 \text{ m/s} - (9.8 \text{ m/s}^2) (2.86 \text{ s}) = -28 \text{ m/s}$$

En consecuencia, la rapidez final es igual a:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(30 \text{ m/s})^2 + (-28 \text{ m/s})^2} \\ &= \sqrt{900 \text{ m}^2/\text{s}^2 + 784 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 41.04 \text{ m/s} \end{aligned}$$



Tiro Parabólico

Ejemplo 4:

El ángulo con el que llega al suelo se puede calcular por medio de la siguiente ecuación:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-28 \text{ m/s}}{30 \text{ m/s}} \right) = -43.03^\circ$$

El alcance logrado por el proyectil es igual al producto de la velocidad horizontal por el tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo, es decir:

$$R = |x - x_0| = |v_x t| = |(30 \text{ m/s}) * (2.86 \text{ s})| = 85.71 \text{ m}$$

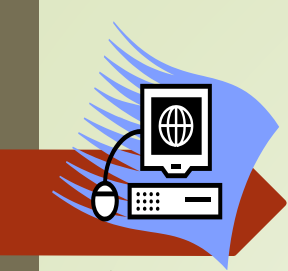


Tiro Parabólico

Ejemplo 4:

La gráfica siguiente muestra la trayectoria del proyectil. Observe en la gráfica que el alcance corresponde con los valores obtenidos teóricamente.





Tiro Parabólico

Ejercicio 4:

Desde un edificio de 50 metros de altura, un proyectil es lanzado con una rapidez inicial de $v_0 = 40 \text{ m/s}$, formando un ángulo de $\theta_0 = 0^\circ$. Calcule: a) El tiempo que tarda en llegar al suelo, b) La rapidez con la que llega al suelo y c) La distancia recorrida al momento de llegar al suelo. Haga una gráfica que represente la trayectoria del proyectil

Solución:

Las velocidades iniciales tanto horizontal como vertical se calculan por medio de las siguientes ecuaciones:

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = (40 \text{ m/s}) \cos (0^\circ) = (40 \text{ m/s}) * (1.0) = 40 \text{ m/s}$$

y

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0 = (40 \text{ m/s}) \sin (0^\circ) = (40 \text{ m/s}) * (0) = 0 \text{ m/s}$$



Tiro Parabólico

Ejemplo 4:

Para conocer el tiempo que tarda en llegar el proyectil al suelo se debe considerar que su posición en ese lugar es igual a cero, es decir: $y = 0$.

En consecuencia:

$$y = y_0 + v_{0y}t + g t^2/2 = 50 \text{ m} + (0) t + (-9.8 \text{ m/s}^2) t^2/2 = 0$$

Reordenando términos:

$$(-4.9 \text{ m/s}^2) t^2 + 50 \text{ m} = 0$$

Por lo que se tiene:

$$t = \sqrt{\frac{-50 \text{ m}}{-4.9 \text{ m/s}^2}} = \sqrt{10.20 \text{ s}^2} = 3.194 \text{ s}$$

Se debe tomar el signo positivo de la raíz debido a que el tiempo no puede ser negativo.



Tiro Parabólico

Ejemplo 4:

Que corresponde al tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo.

Para calcular la velocidad vertical final con la que llega el proyectil al suelo, debemos utilizar el tiempo que hemos calculado anteriormente y haciendo uso de la siguiente ecuación:

$$v_y = v_{0y} + g t = 0 \text{ m/s} - (9.8 \text{ m/s}^2) (3.194 \text{ s}) = -31.30 \text{ m/s}$$

En consecuencia, la rapidez final es igual a:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(40 \text{ m/s})^2 + (-31.30 \text{ m/s})^2} \\ &= \sqrt{1600 \text{ m}^2/\text{s}^2 + 980 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 50.79 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Como la rapidez es positiva, se debe tomar el signo positivo de la raíz.



Tiro Parabólico

Ejemplo 4:

El ángulo con el que llega al suelo se puede calcular por medio de la siguiente ecuación:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-31.30 \text{ m/s}}{40 \text{ m/s}} \right) = -38.04^\circ$$

El alcance logrado por el proyectil es igual al producto de la velocidad horizontal por el tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo, es decir:

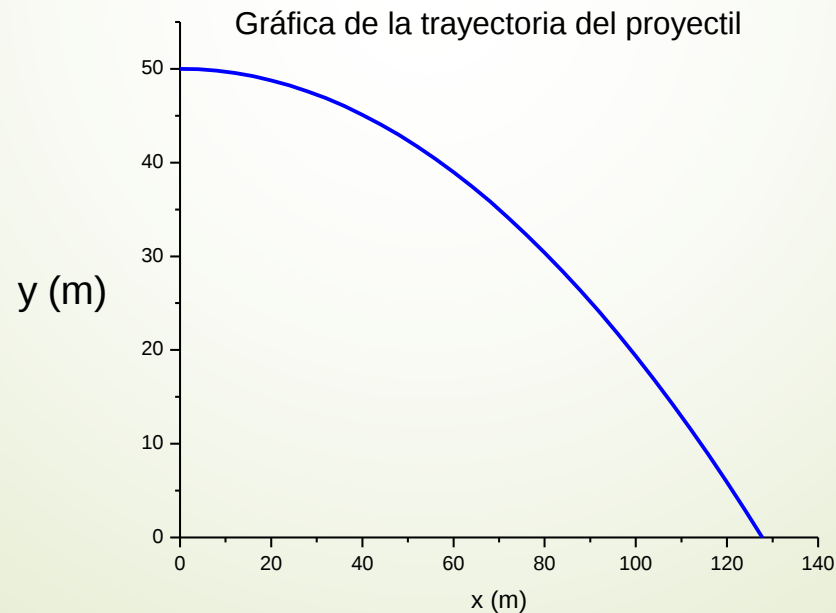
$$R = |x - x_0| = |v_x t| = |(40 \text{ m/s}) * (3.194 \text{ s})| = 127.77 \text{ m}$$

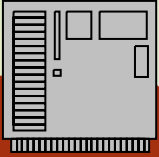


Tiro Parabólico

Ejemplo 4:

La gráfica siguiente muestra la trayectoria del proyectil. Observe en la gráfica que el alcance corresponde con los valores obtenidos teóricamente.





Atentamente:

Dr. Guillermo Becerra Córdova

Página: <http://virtual.chapingo.mx/fis>