

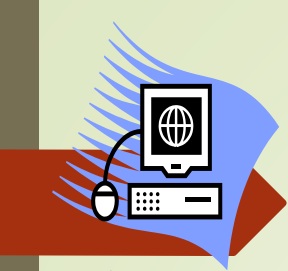


Universidad Autónoma Chapingo
Dpto. de Preparatoria Agrícola
Área de Física



“Transformación de coordenadas cartesianas a polares”

Agosto del 2023



Se define la magnitud de un vector como:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2}$$

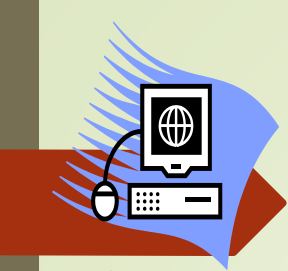
Donde:

x es la componente horizontal del vector.

y es la componente vertical del vector.

La magnitud de cualquier vector no es negativa. Por lo tanto, siempre se debe tomar el signo positivo de la raíz cuadrada.

Para cada vector existe una única magnitud. No existen dos magnitudes diferentes de un mismo vector.



Ejemplo:

Si $\vec{V} = (3, 4)$ es un vector, entonces su magnitud está dada por:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Si $\vec{V} = (-3, 4)$ es un vector, entonces su magnitud está dada por:

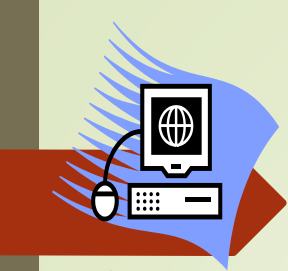
$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Si $\vec{V} = (-3, -4)$ es un vector, entonces su magnitud está dada por:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Si $\vec{V} = (3, -4)$ es un vector, entonces su magnitud está dada por:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$



Ejercicios:

Si $\vec{V} = (6, 8)$ es un vector, entonces su magnitud está dada por:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(6)^2 + (8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

Si $\vec{V} = (-6, 8)$ es un vector, entonces su magnitud está dada por:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-6)^2 + (8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

Si $\vec{V} = (-6, -8)$ es un vector, entonces su magnitud está dada por:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

Si $\vec{V} = (6, -8)$ es un vector, entonces su magnitud está dada por:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$



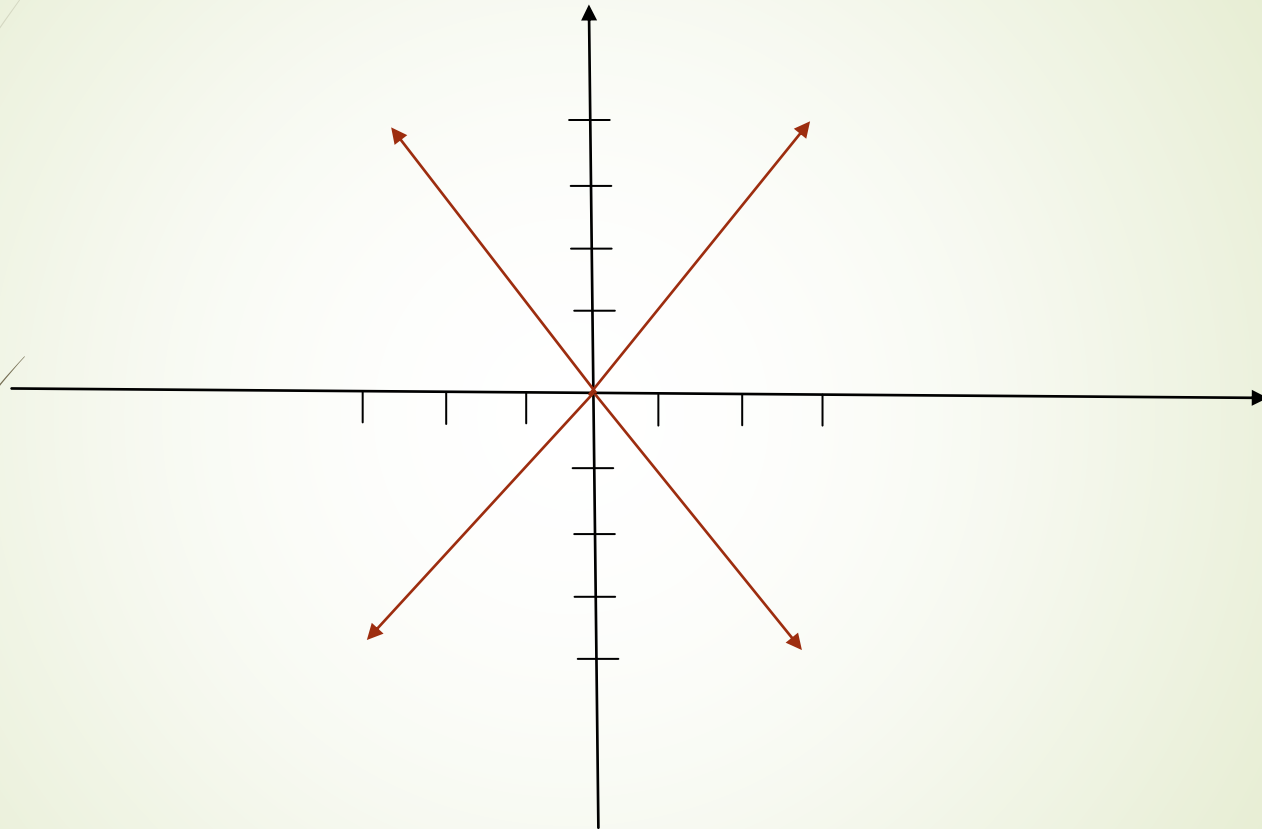
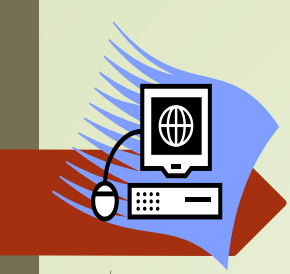
Ejemplo:

Si $\vec{V} = (3.5355, 3.5355)$ es un vector, entonces su magnitud está dada por:

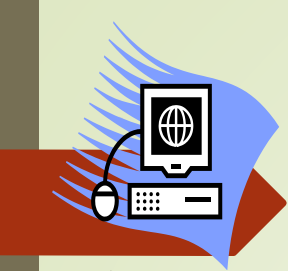
$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3.5355)^2 + (3.5355)^2} = \sqrt{12.5 + 12.5} = \sqrt{25} = 5$$

Estos resultados nos indican que existe una infinidad de vectores con la misma magnitud.

No es lo mismo que un vector tenga muchas magnitudes a que varios vectores tengan la misma magnitud. El primer caso no puede ser posible.



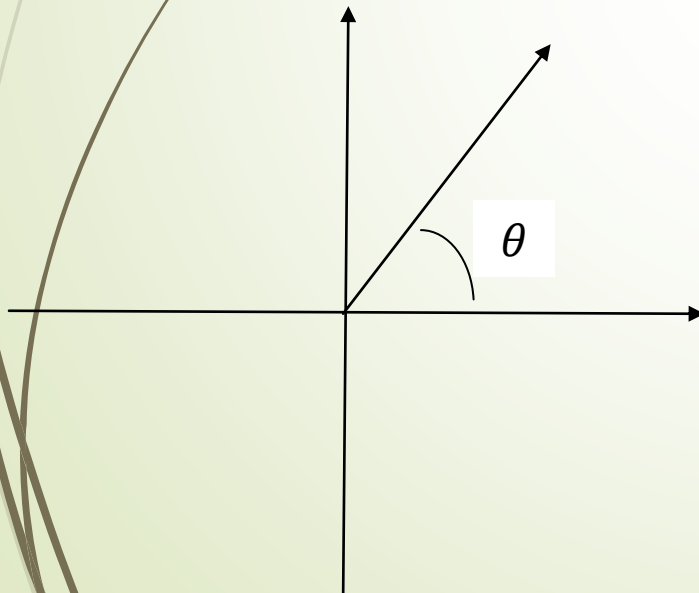
Se observa que, a pesar de que los vectores tienen diferente dirección, todos tienen la misma longitud.



Dirección de un vector.

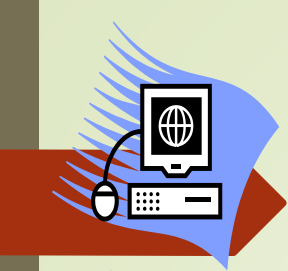
Si el vector se dibuja en un plano cartesiano, la dirección y sentido de ese vector están determinados completamente por el ángulo que forma la parte positiva del eje de las abscisas y el vector.

Se puede visualizar la dirección de un vector haciendo un diagrama de un vector que se encuentre trazado en un plano cartesiano.



En términos de la tangente se tiene que la dirección θ del vector se puede calcular de la siguiente manera:

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$



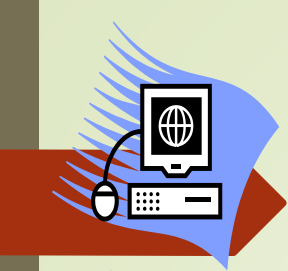
La magnitud del vector $\vec{V}$ es $V = \sqrt{x^2 + y^2}$
y su dirección

$$\theta = \text{Arctan}(y/x) = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right).$$

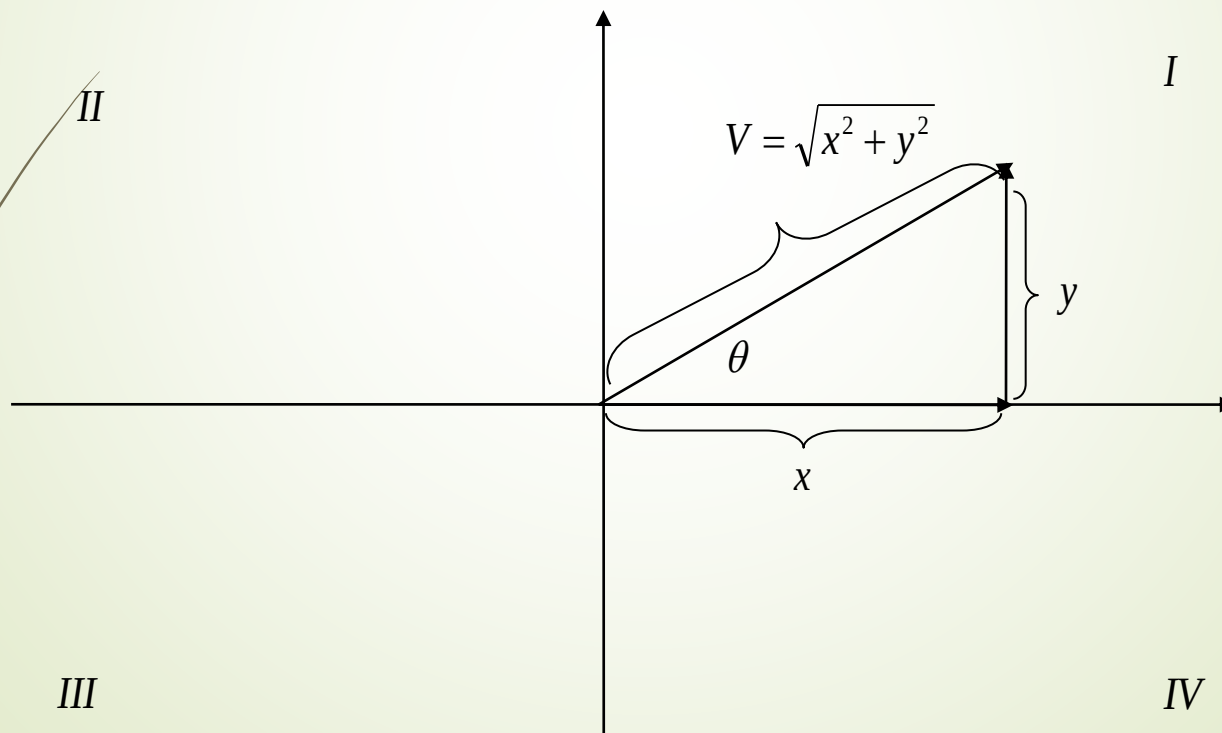
Podemos establecer que un vector lo podemos caracterizar por dos formas.

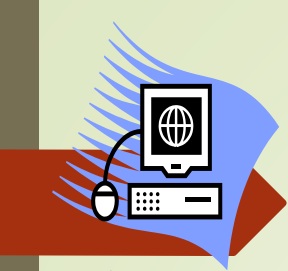
1.- Por un par de coordenadas (x, y) llamadas coordenadas cartesianas: la primera coordenada lleva el nombre de abscisa y representa el desplazamiento horizontal, y la segunda se conoce como ordenada y representa el desplazamiento vertical.

2.- Por un par de coordenadas (r, θ) llamadas coordenadas polares. La primera coordenada es la magnitud del vector y la segunda representa su dirección.



Como ambos sistemas de coordenadas describen completamente a un vector, estos sistemas son equivalentes. En consecuencia, a partir de un sistema de coordenadas podemos obtener el otro sistema y viceversa.





El ángulo formado por el vector y el eje horizontal positivo puede tomar valores entre $0^0 \leq \theta < 360^0$, dependiendo del cuadrante donde se encuentre el vector.

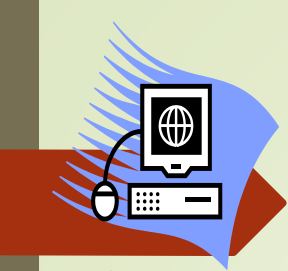
Para un vector en el primer cuadrante, el ángulo θ es mayor a 0^0 y menor o igual a 90^0 .

Para un vector en el segundo cuadrante, el ángulo θ es mayor a 90^0 y menor o igual a 180^0 .

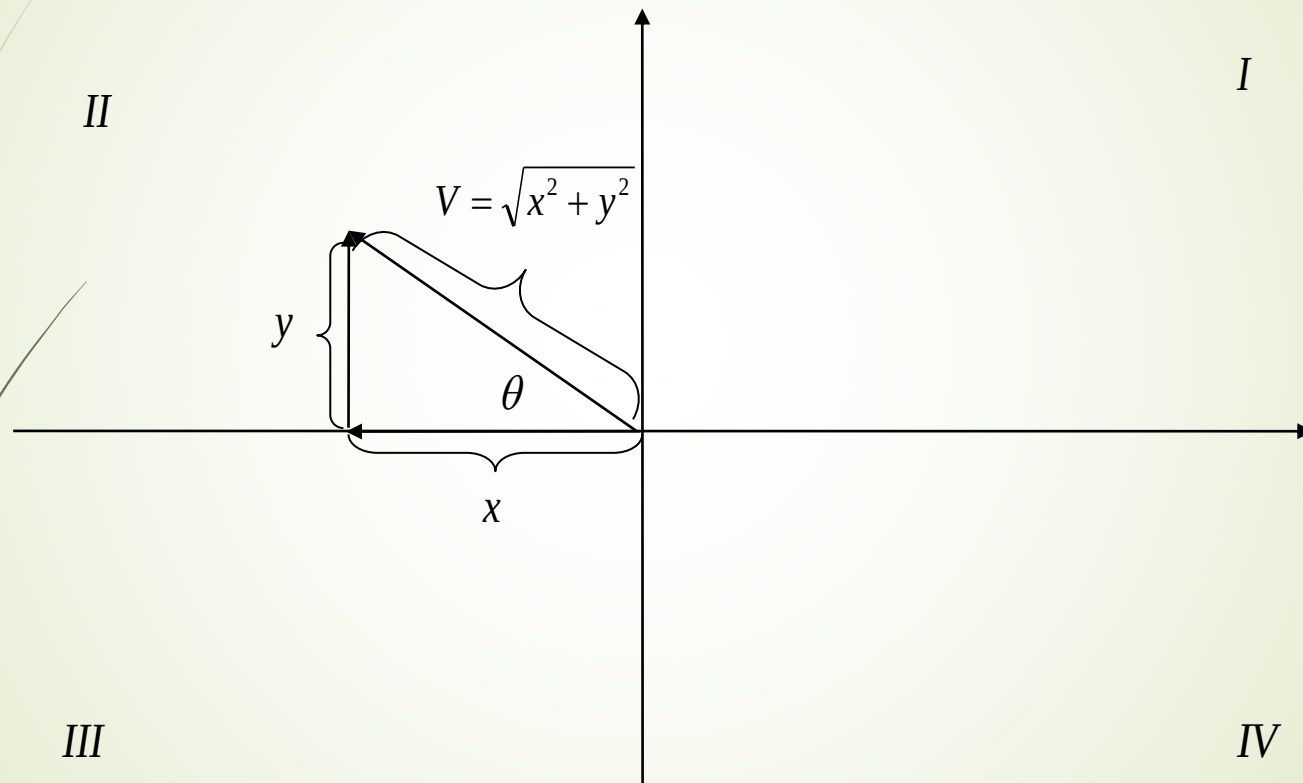
Para un vector en el tercer cuadrante, el ángulo θ es mayor a 180^0 y menor o igual a 270^0 .

Para un vector en el cuarto cuadrante, el ángulo θ es mayor a 270^0 y menor o igual a 360^0 .

En consecuencia, las fórmulas de transformación se deben modificar para que se obtengan las direcciones de los vectores de acuerdo al cuadrante donde se encuentren. Para vectores en el segundo cuadrante el ángulo dado por la ecuación $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$ es el que forma el vector con el eje horizontal negativo, el cual no corresponde con la dirección real del vector.

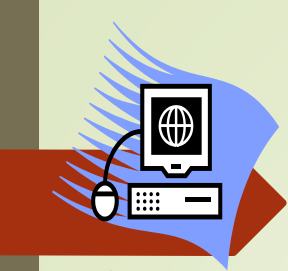


Observe en la figura que el vector se encuentra en el segundo cuadrante.



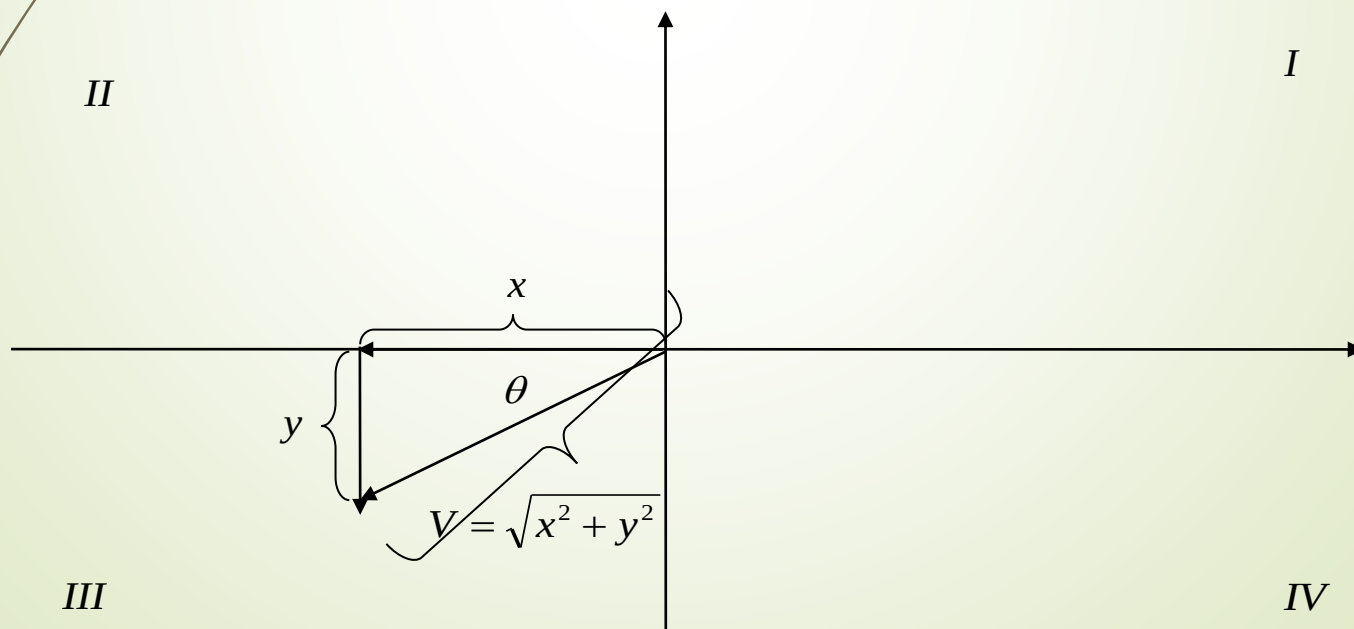
En consecuencia, es necesario sumarle 180^0 a este valor para obtener su dirección, es decir:

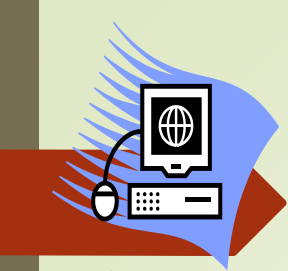
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) + 180^0$$



Para vectores en el tercer cuadrante el ángulo dado por la ecuación $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ es el que forma el vector con el eje horizontal negativo, el cual no corresponde con la dirección real del vector. En consecuencia, es necesario sumarle 180° a este valor para obtener su dirección, es decir:

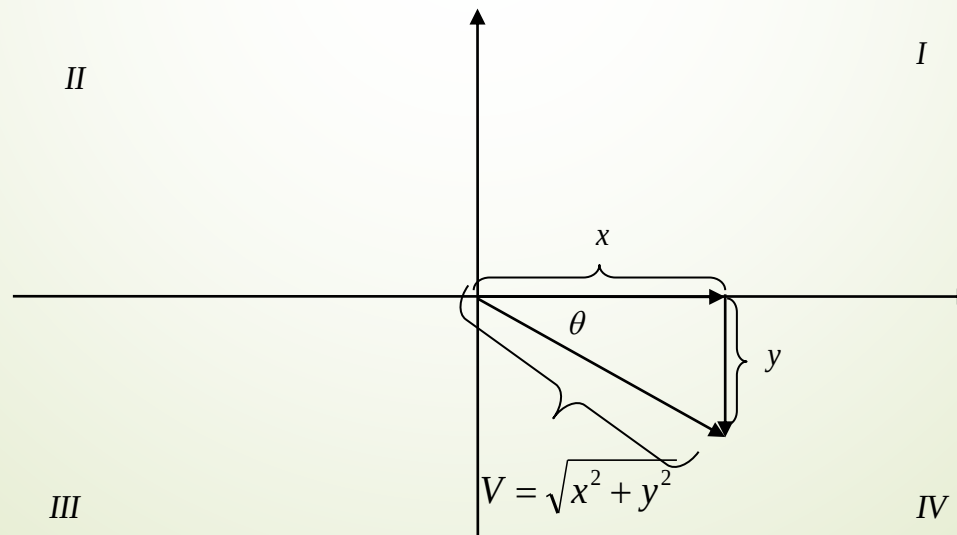
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + 180^\circ$$

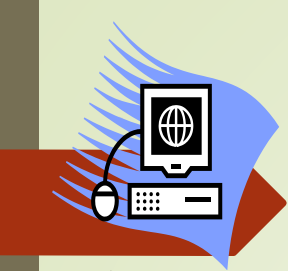




Para vectores en el cuarto cuadrante el ángulo dado por la ecuación $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$ es el que forma el vector con el eje horizontal positivo, el cual no corresponde con la dirección real del vector. En consecuencia, es necesario sumarle 360° a este valor para obtener su dirección, es decir:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) + 360^\circ$$





Al aplicar las fórmulas de transformación de coordenadas polares a cartesianas, los signos de cada componente se obtendrán directamente. La siguiente tabla muestra los signos de cada componente dependiendo del valor del ángulo o de la dirección del vector.

Ángulo	Cuadrante	x	y
$0 \leq \theta < 90^\circ$	Primer.	Positivo.	Positivo.
$90^\circ < \theta \leq 180^\circ$	Segundo.	Negativo.	Positivo.
$180^\circ < \theta < 270^\circ$	Tercer.	Negativo.	Negativo.
$270^\circ < \theta < 360^\circ$	Cuarto.	Positivo.	Negativo.



Ejemplos:

Calcule la longitud y dirección de siguiente vector: $\vec{V} = (3, 5)$

Solución:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3)^2 + (5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} = 5.83095$$

$$\theta = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{5}{3}\right) = 59.03^\circ$$

Calcule la longitud y dirección de siguiente vector: $\vec{V} = (-3, 5)$

Solución:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + (5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} = 5.83095$$

$$\theta = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) + 180^\circ = \text{Arctan}\left(-\frac{5}{3}\right) + 180^\circ = -59.036^\circ + 180^\circ = 120.96^\circ$$



Ejemplos:

Calcule la longitud y dirección de siguiente vector: $\vec{V} = (-3, -5)$

Solución:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} = 5.83095$$

$$\theta = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) + 180^\circ = \text{Arctan}\left(\frac{-5}{-3}\right) + 180^\circ = 59.036^\circ + 180^\circ = 239.036^\circ$$

Calcule la longitud y dirección de siguiente vector: $\vec{V} = (3, -5)$

Solución:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} = 5.83095$$

$$\theta = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) + 360^\circ = \text{Arctan}\left(\frac{-5}{3}\right) + 360^\circ = -59.036^\circ + 360^\circ = 300.964^\circ$$



Ejercicios:

Calcule la longitud y dirección de siguiente vector: $\vec{V} = (4, 6)$

Solución:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(4)^2 + (6)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 7.21$$

$$\theta = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{6}{4}\right) = 56.31^\circ$$

Calcule la longitud y dirección de siguiente vector: $\vec{V} = (-4, 6)$

Solución:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + (6)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 7.21$$

$$\theta = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) + 180^\circ = \text{Arctan}\left(\frac{6}{-4}\right) + 180^\circ = -56.31^\circ + 180^\circ = 123.69^\circ$$



Ejemplos:

Calcule la longitud y dirección de siguiente vector: $\vec{V} = (-4, -6)$

Solución:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 7.21$$

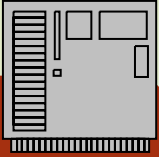
$$\theta = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) + 180^\circ = \text{Arctan}\left(\frac{-6}{-4}\right) + 180^\circ = 56.31^\circ + 180^\circ = 236.31^\circ$$

Calcule la longitud y dirección de siguiente vector: $\vec{V} = (4, -6)$

Solución:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 7.21$$

$$\theta = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right) + 360^\circ = \text{Arctan}\left(\frac{-6}{4}\right) + 360^\circ = -56.31^\circ + 360^\circ = 303.69^\circ$$



Atentamente:

Dr. Guillermo Becerra Córdova

Página: <http://virtual.chapingo.mx/fis>