



“UN SISTEMA DE SIMULACIÓN PARA EL TIRO PARABÓLICO”

Guillermo Becerra Córdova

Universidad Autónoma Chapingo

Dpto. de Preparatoria Agrícola

Área de Física

E-mail: gllrbecerra@yahoo.com

RESUMEN

En este trabajo se describe un programa que muestra la simulación del tiro parabólico. La simulación consiste en gráficas que muestran simultáneamente el movimiento de dos objetos que se desplazan describiendo trayectorias parabólicas. El usuario podrá seleccionar los valores de las condiciones iniciales como la posición, la rapidez y el ángulo de disparo. De igual forma, podrá fijar a su elección el tiempo de duración de la simulación. La simulación proporciona una manera fácil de analizar la influencia de los diferentes parámetros que intervienen en ella, mostrando el movimiento de dos proyectiles. El programa mostrará los valores de las posiciones, de las rapidezces y de los ángulos finales de los objetos al término de la simulación. El objetivo que se persigue con el trabajo es observar simultáneamente el desplazamiento de ambos objetos al variar los parámetros que rigen sus movimientos. Se pretende dar a conocer, preferentemente a los docentes de Física de nivel medio superior, una herramienta asistida por computadora, que sirva como apoyo a la labor docente.

ABSTRACT

In this work is described a program that it shows the simulation of the parabolic shot. The simulation consists on graphs that show the movement of two objects that they move describing parabolic trajectories simultaneously. The user will be able to select the values of the initial conditions as the position, the speed and the shot angle. Of equal it forms, he will be able to fix to their election the time of duration of the simulation. The simulation provides a way easy to analyze the influence of the different parameters that they intervene in her, showing the movement of two projectiles. The program will show the values of the positions, of the speeds and of the final angles of the objects at the end of the simulation. The objective that is pursued with the work is to observe the displacement simultaneously from both objects when varying the parameters that govern its movements. It is also sought to give to know, preferably to the educational of physics high school level, a tool attended by computer that serves like support to the educational work.

PALABRAS CLAVE: Tiro Parabólico, Simulación, Velocidad, Rapidez, Ángulo, Aceleración.

KEY WORDS: Parabolic Shot, Simulation, Speed, Angle, Acceleration.

INTRODUCCIÓN:

El movimiento de un cuerpo en una superficie plana es un movimiento en dos dimensiones. Para localizar el cuerpo se requieren, en general, dos coordenadas. Los proyectiles son un ejemplo de movimiento en dos dimensiones. Se llama proyectil a cualquier objeto que es lanzado por algún agente y que continúa en movimiento en virtud de su propia inercia, siguiendo una trayectoria determinada por la fuerza gravitacional que actúa sobre él. Una bola disparada por un cañón, una piedra lanzada al aire o una pelota que cae por el borde de una mesa, son casos particulares de proyectiles.

El camino seguido por un proyectil se denomina trayectoria. Los proyectiles describen trayectorias curvilíneas, las cuales pueden descomponerse en una componente horizontal y en otra vertical. En la dirección horizontal el proyectil se mueve con velocidad constante, recorriendo distancias iguales en iguales intervalos de tiempo. No hay aceleración en la dirección horizontal del movimiento. En cambio, en la dirección vertical, la velocidad sufre cambios, es decir, por la presencia de la gravedad de la tierra, el objeto experimenta una aceleración en la dirección vertical.

Es interesante mencionar que la componente horizontal del movimiento de un proyectil es totalmente independiente de la componente vertical. Cada una de ellas actúa de manera independiente. Sus efectos combinados producen toda la gama de trayectorias curvas que describen los proyectiles. Por ello, la trayectoria de un proyectil se puede analizar considerando por separado su componente horizontal y vertical.

La trayectoria que describe un proyectil que sólo se acelera en la dirección vertical, moviéndose con velocidad horizontal constante, se llama parábola. Cuando no es

posible despreciar la resistencia del aire, las trayectorias no son parabólicas. Supondremos que podemos ignorar el efecto que produce el aire en estos movimientos.

RESULTADOS:

En esta sección describiremos, como resultado del proyecto, el programa que lleva a cabo la simulación del movimiento de los proyectiles. La simulación consiste en gráficas que muestran simultáneamente el desplazamiento de dos objetos que se mueven describiendo una trayectoria parabólica. El programa es activado haciendo doble click en el icono correspondiente con esta aplicación. La figura 1 muestra la distribución de las diversas opciones con las que cuenta el sistema. Las barras de desplazamiento que se encuentran en la parte superior de la pantalla, son utilizadas para que el usuario seleccione a través de ellas los valores de los tiempos, de las posiciones, horizontal y vertical, de las rapidezces y de los ángulos con los cuales comenzarán a moverse cada uno de los objetos. De igual forma, existe una barra de desplazamiento para seleccionar el tiempo de duración de la simulación. Este tiempo es el mismo para ambos cuerpos, ya que hemos considerado que los movimientos terminen simultáneamente. Observe que conforme se modifican las barras de desplazamiento, en las cajas de texto respectivas se despliegan los valores de cada uno de los parámetros que rigen la simulación. Las cajas de texto colocadas en la parte inferior izquierda, son empleadas para desplegar en ellas, al final de la simulación, los valores de las posiciones, vertical y horizontal, de los ángulos que forman las velocidades y de las rapidezces de los objetos. Cada uno de estos valores los calcula el sistema haciendo uso de las ecuaciones mencionadas en la parte de la discusión.

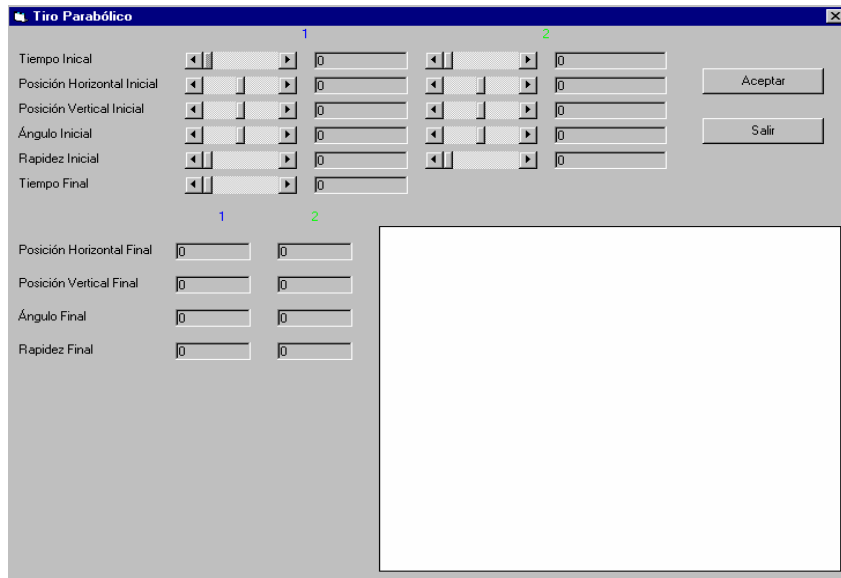


FIGURA 1

El objetivo que se persigue con el programa es que el usuario pueda observar simultáneamente el desplazamiento de ambos objetos al variar los parámetros que rigen sus movimientos.

Para introducir los valores de los parámetros que rigen los movimientos de los proyectiles, es necesario colocarse en una barra de desplazamiento particular. Después que se ha ubicado en una de ellas, será posible disminuir o aumentar una cantidad determinada con solo hacer click con el botón izquierdo del ratón en la flecha izquierda o derecha de la barra o sobre la barra de desplazamiento. Cada valor introducido será desplegado en la etiqueta correspondiente. El proceso se aplica para cada una de las barras de desplazamiento que componen el sistema. La figura 2 muestra algunos valores que han sido introducidos en cada etiqueta. Esta figura muestra que sólo se han introducido valores para los ángulos y rapidezces iniciales. Observamos que los proyectiles son lanzados a 40 unidades de velocidad y a 30 grados con respecto de la horizontal.

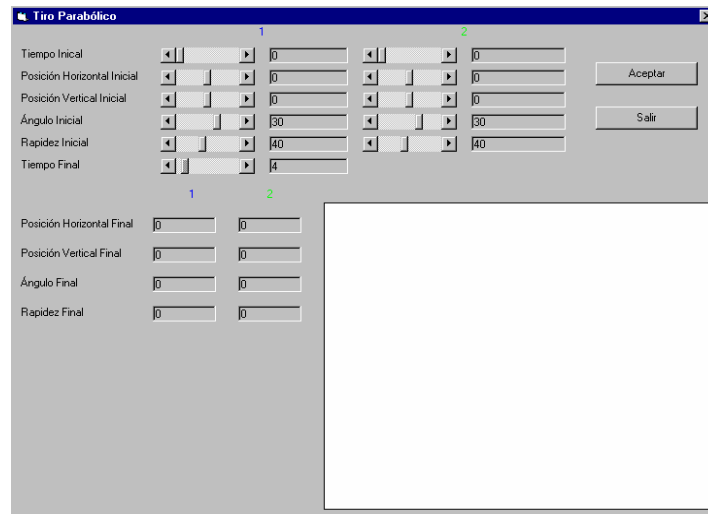


FIGURA 2

De igual forma las posiciones iniciales, tanto horizontal como vertical, al igual que el tiempo inicial no adquieren valores. En este caso ambos cuerpos comenzarán a moverse bajo los mismo valores iniciales. En consecuencia, las trayectorias de ambos objetos serán idénticas. Para observar el movimiento de los objetos de acuerdo con los valores de los parámetros introducidos por el usuario, es necesario activar la simulación. Para ello, debemos hacer click con el botón izquierdo del ratón sobre el botón de comando **Aceptar** colocado en la parte superior derecha de la pantalla. Una vez activada, se mostrará la gráfica de los movimientos de cada uno de los proyectiles que intervienen en la simulación. El sistema calculará las escalas en ambos ejes y ajustará automáticamente las gráficas en el espacio diseñado para ello, de acuerdo con los valores introducidos por el usuario. Debido a que en este caso ambos objetos tienen asignados los mismos valores de sus parámetros, sólo podrá verse una gráfica ya que estarán sobrepuestas. Como se mencionó anteriormente, al término de la simulación aparecerán en las cajas de texto de la parte inferior izquierda, los valores correspondientes a las posiciones horizontal y vertical, a los ángulos y a las rapidezces

de cada uno de los objetos. Esta opción se puede invocar cuantas veces desee el usuario, sin necesidad de introducir nuevamente los parámetros que rigen el movimiento de los proyectiles. Observe la figura 3.

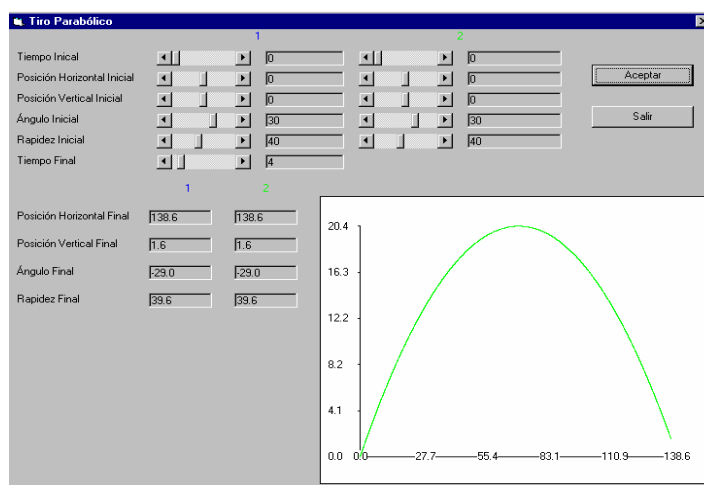


FIGURA 3

Note en la figura que el tiempo final de la simulación coincide aproximadamente con el tiempo que tardan los proyectiles en alcanzar la altura a la que fueron lanzados. Este tiempo puede ser obtenido haciendo uso de la ecuación 15 contenida en la discusión, la cuál calcula el tiempo que tarda en alcanzar el proyectil la altura máxima. El tiempo que tarda en regresar a la misma altura, es igual al doble del tiempo obtenido en la mencionada ecuación. Observe en la figura que el ángulo que forma la trayectoria con el eje horizontal, cuando los proyectiles se encuentran a la misma altura a la que partieron, coincide con los ángulos iniciales de lanzamiento.

El usuario podrá introducir otros valores en las diferentes barras de desplazamiento relacionadas con los parámetros que rigen el movimiento de los objetos. Por lo tanto, tendrá la posibilidad de experimentar con diferentes valores para observar la trayectoria del movimiento de los objetos. La figura 4 muestra algunos cambios en los

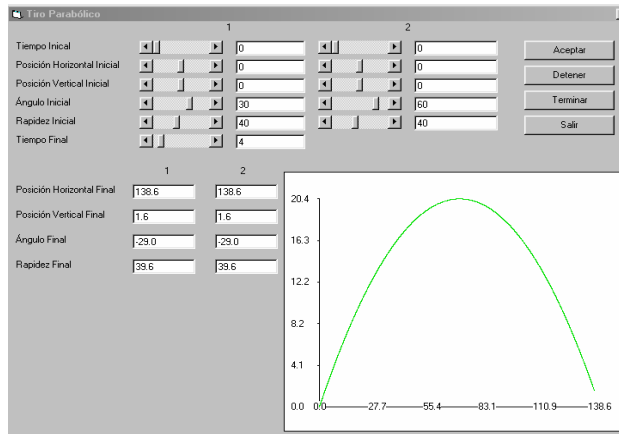


FIGURA 4

valores de estos parámetros. Observe en la misma figura que la gráfica desplegada en pantalla, aún no corresponden con los valores que introdujo el usuario. Para actualizarla, es necesario activar de nuevo la opción **Aceptar**. La figura 5 muestra la gráfica correspondiente con estos nuevos valores.

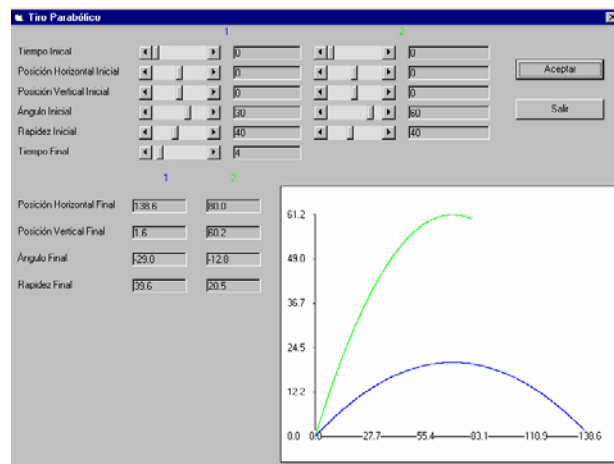


FIGURA 5

Observe en la figura que el segundo proyectil es lanzado bajo un ángulo diferente al cual es lanzado el primero de ellos. La suma de los ángulos es de 90 grados, que es la condición para que los dos proyectiles tengan el mismo alcance. En la figura no es posible mostrar esta afirmación, debido a que el tiempo de la simulación no es lo

suficientemente grande para cubrir totalmente el vuelo del segundo proyectil, por lo que es necesario incrementar este tiempo.

La figura 6 muestra que el alcance logrado por ambos proyectiles en el suelo es el mismo. El hecho de que el ángulo con el que es lanzado un proyectil sea mayor, se traduce en una trayectoria más elevada. En este caso los proyectiles alcanzan mayores alturas, implicando que el tiempo de vuelo del proyectil sea mayor. Observe en la misma figura que el programa ajusta las gráficas al espacio del cuadro diseñado para este propósito.

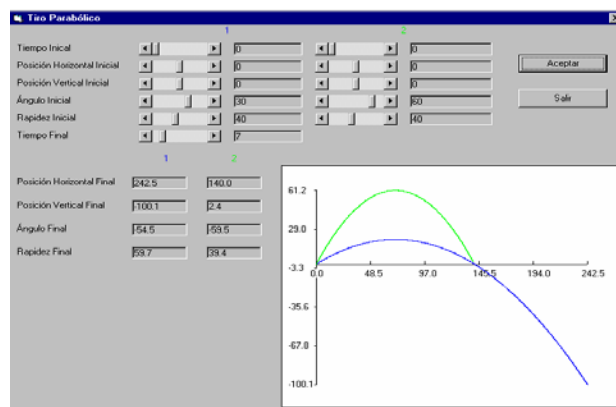


FIGURA 6

La figura 7 muestra, a manera de ejemplo, las gráficas de los proyectiles que son lanzados con un ángulo de 30 grados con respecto de la horizontal, una rapidez de 40 unidades de velocidad y además el segundo proyectil es lanzado 20 unidades de longitud por arriba del origen. Esto hace que la gráfica correspondiente con el segundo objeto se encuentre desplazada hacia arriba las mismas unidades de longitud. En consecuencia, las gráficas son idénticas, por lo que al término de la simulación la rapidez y el ángulo con el cual viajan los proyectiles sean los mismos.

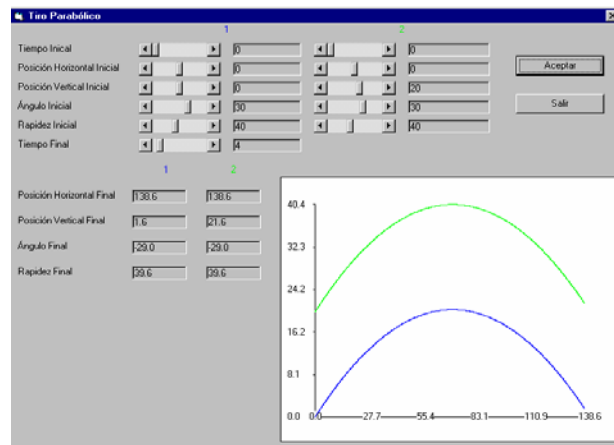


FIGURA 7

La figura 8 muestra una situación similar, con la diferencia de que el segundo proyectil es lanzado ahora a 20 unidades a la derecha del origen. En la figura observe que la gráfica del proyectil también estará desplazada hacia la derecha las mismas unidades. En consecuencia, las gráficas son idénticas, por lo que al término de la simulación el alcance, la rapidez y el ángulo con el cual viajan los proyectiles es el mismo.

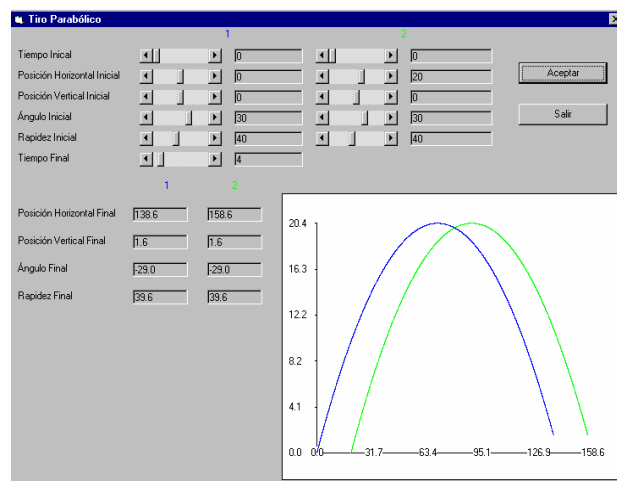


FIGURA 8

El sistema también acepta ángulos iniciales negativos. La figura 9 muestra un ejemplo en el cual un proyectil es lanzado con un ángulo inicial positivo y el otro es lanzado con el mismo ángulo pero negativo, es decir, hacia abajo. Los proyectiles se lanzan 50

unidades por arriba del origen, por lo que el proyectil que es lanzado hacia abajo, llegará al suelo en menor tiempo.

Esto nos indica que el proyectil que es lanzado hacia arriba permanece en vuelo más tiempo. Observe en la figura que la velocidad de los proyectiles en la dirección horizontal es la misma ya que recorren la misma distancia en esa dirección.

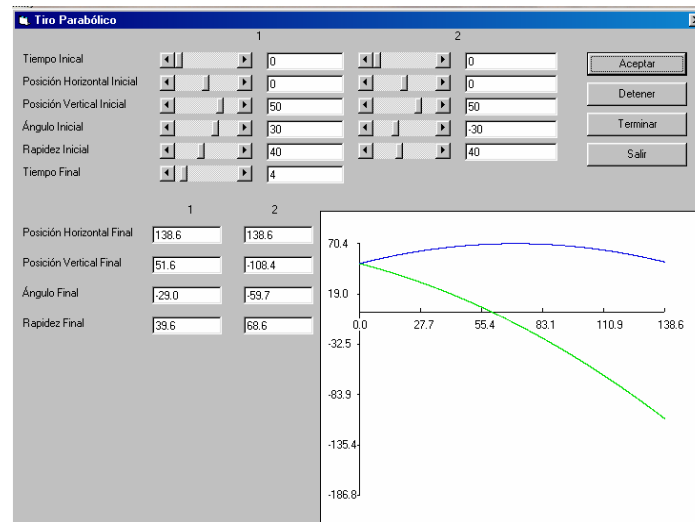


FIGURA 9

Finalmente, mencionaremos que el usuario podrá introducir cualquier valor en las diferentes celdas relacionadas con los parámetros que rigen el movimiento de los objetos. La graficación podrá activarse para los nuevos valores, por lo que el proceso podrá repetirse cuantas veces desee el usuario a fin de que pueda comparar el movimiento de ambos objetos. El sistema está diseñado para soportar cualquier tipo de valor dentro de su correspondiente rango de las variables que rigen el movimiento de los proyectiles. Así, si desea, será posible introducir valores negativos para las posiciones iniciales, tanto horizontales como verticales, o para los ángulos iniciales. Aunque matemáticamente está permitido introducir valores negativos para el tiempo, el programa no será activado si se introducen valores menores que cero para estas

variables. De igual forma, no se activará el programa si alguno o los dos tiempos iniciales, son mayores al tiempo final de la simulación.

Cabe recordar que el movimiento de los proyectiles está regido por las ecuaciones establecidas en la parte de la discusión, por lo que es posible comprobar los datos calculados por el sistema a través de estas ecuaciones.

DISCUSIÓN:

En el tiro parabólico la velocidad en la dirección horizontal de la trayectoria seguida por el proyectil, es constante, por lo que el movimiento en esta dirección puede ser descrito completamente por las ecuaciones correspondientes al Movimiento Rectilíneo Uniforme. Para la posición horizontal del proyectil, se tiene:

$$x=x_0+v_x(t-t_0) \quad (1)$$

donde: x_0 es la posición horizontal del cuerpo al instante t_0 , a esta posición se le conoce con el nombre de posición horizontal inicial; x es la posición horizontal del cuerpo al instante t y se le conoce como posición horizontal final; v_x es la velocidad del proyectil en la dirección horizontal, la cuál se considera constante.

Asimismo, la velocidad del cuerpo en la dirección horizontal, está dada por la siguiente ecuación:

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 \quad (2)$$

donde: v_0 y θ_0 son la rapidez y el ángulo inicial con el que es disparado el proyectil, respectivamente.

De igual forma, en la dirección vertical, el movimiento del proyectil es con aceleración constante por lo que su posición y velocidad pueden ser descritos a través de las

ecuaciones correspondientes al Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado. Las ecuaciones para la posición vertical son:

$$y = y_0 + v_{y_0}(t - t_0) + g(t - t_0)^2 / 2 \quad (3)$$

$$y = y_0 + (v_y^2 - v_{y_0}^2) / 2g \quad (4)$$

$$y = y_0 + (v_y + v_{y_0})(t - t_0) / 2 \quad (5)$$

donde: y_0 es la posición vertical del cuerpo al instante t_0 o al comienzo del movimiento, a esta posición se le conoce con el nombre de posición vertical inicial; y es la posición vertical del proyectil al instante t y se le conoce con el nombre de posición vertical final; v_{y_0} es la velocidad vertical del objeto al comienzo del movimiento o al instante t_0 y se le conoce como velocidad vertical inicial; v_y es la velocidad vertical del proyectil al instante t y se le conoce como velocidad vertical final.

La velocidad vertical inicial está dada por la siguiente relación:

$$v_{y_0} = v_0 \sen \theta_0 \quad (6)$$

donde: v_0 y θ_0 son la rapidez y el ángulo inicial con el que es disparado el proyectil, respectivamente.

La velocidad vertical final puede ser calculada por medio de la ecuación:

$$v_y = v \sen \theta \quad (7)$$

donde: v y θ son la rapidez y el ángulo con el que se desplaza el proyectil al instante t . De igual forma esta velocidad está expresada en función del tiempo a través de la siguiente igualdad:

$$v_y = v_0 \sen \theta_0 + g(t - t_0) \quad (8)$$

Por medio de esta ecuación podremos calcular la velocidad del proyectil en la dirección vertical con sólo conocer el tiempo de vuelo, al igual que la rapidez y ángulo inicial.

La rapidez v_0 del proyectil al instante t_0 o rapidez inicial es igual a la magnitud de la velocidad inicial, es decir:

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_{y_0}^2} \quad (9)$$

y el ángulo θ_0 que forma la velocidad inicial con la horizontal en dicho instante está dado por:

$$\tan \theta_0 = \frac{v_{y_0}}{v_x} \quad (10)$$

La rapidez v del proyectil al instante t o rapidez final es igual a la magnitud del vector velocidad, es decir:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (11)$$

y el ángulo θ que forma el vector velocidad con la horizontal en dicho instante está dado por:

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} \quad (12)$$

El vector velocidad es tangente a la trayectoria de la partícula en todos sus puntos.

Las ecuaciones 1, 2, 3 y 6 determinan a x y a y en función del parámetro común $(t - t_0)$ que es el tiempo de vuelo. Combinándolas y eliminando a $(t - t_0)$, obtenemos:

$$y = y_0 + (\tan \theta_0)(x - x_0) + \frac{g}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} (x - x_0)^2 \quad (13)$$

que relaciona a y con x , siendo la ecuación de la trayectoria del proyectil.

Como x_0, y_0, θ_0, v_0 y g son constantes, la ecuación anterior corresponde a la ecuación de una parábola. En consecuencia, la trayectoria de un proyectil es parabólica. Es prudente aclarar que en todo el desarrollo, hemos considerado que el valor de la aceleración de la gravedad es igual a -9.8 m/s^2 . El signo negativo nos indica que el movimiento del proyectil hacia arriba es desacelerado y hacia abajo es acelerado. Bajo estas circunstancias, toda parábola que describe el movimiento de un proyectil, tendrá su concavidad dirigida hacia abajo.

La ecuación 13 nos indica que un proyectil puede ser lanzado con la misma rapidez inicial pero con ángulos diferentes. La velocidad vertical inicial es mayor para un ángulo de lanzamiento mayor y viceversa. El hecho de que la componente vertical de la velocidad inicial sea mayor, se traduce en una trayectoria más elevada. En este caso, los proyectiles alcanzan mayores alturas. Por supuesto, cuando el ángulo es menor, el objeto permanece en vuelo durante menor tiempo.

De igual forma, esta ecuación nos indica que un proyectil puede ser lanzado con el mismo ángulo inicial a diferentes rapidezces. En esta situación, las velocidades iniciales, tanto horizontal como vertical, serán mayores conforme aumente el valor de la rapidez inicial. En consecuencia, la altura y el alcance logrado por el proyectil también aumentarán.

Si el origen del sistema de coordenadas se fija en el sitio en el que se dispara el proyectil, los valores de x_0 y y_0 serían iguales a cero, coincidiendo el origen del sistema de coordenadas en el punto donde el proyectil se dispara. En esta situación, la ecuación se simplifica a:

$$y = (\tan \theta_0) x + \frac{g}{2 (v_0 \cos \theta_0)^2} x^2 \quad (14)$$

Si la resistencia del aire es lo bastante pequeña para que podamos despreciarla, el proyectil alcanzará su máxima altura en un tiempo igual a:

$$t_{max} = t_0 - \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \quad (15)$$

donde t_{max} es el tiempo que tarda el proyectil en alcanzar la altura máxima. La velocidad del proyectil en la dirección vertical es cero cuando alcanza la altura máxima. En consecuencia, la rapidez del proyectil a esa altura será mínima. El proyectil regresará a la misma altura empleando el doble de tiempo. Esto se debe a que la desaceleración debida a la gravedad cuando el proyectil va hacia arriba, es igual a la aceleración producida por la gravedad cuando va hacia abajo. La rapidez que pierde al subir es, por tanto, igual a la rapidez que adquiere al bajar, de modo que el proyectil llega al mismo nivel con la misma rapidez.

La altura máxima alcanzada por el proyectil se calcula sustituyendo la ecuación 15 en la ecuación 3, obteniéndose la siguiente expresión:

$$y_{max} = y_0 - \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} \quad (16)$$

El máximo valor de y_{max} es cuando el proyectil se lanza verticalmente ya que $\theta_0 = 90^\circ$, $\sin \theta_0 = 1$ y $y_{max} = y_0 - v_0^2 / 2g$. Si se lanza horizontalmente, $\theta_0 = 0^\circ$ y la altura máxima sería igual a y_0 .

Como la componente horizontal de la velocidad del proyectil permanece constante durante todo el vuelo, la distancia horizontal alcanzada, es decir el alcance, es igual al

producto de esta velocidad por el tiempo que tarda el proyectil en llegar a la misma altura a la que fue lanzado, es decir:

$$R = x - x_0 = -\frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0 \quad (17)$$

Al valor de R se le conoce como alcance. Notamos que el alcance es máximo cuando $\theta_0 = 45^\circ$, ya que el máximo valor que puede tener el seno de un ángulo es 1, cuando el ángulo es de 90 grados. Puesto que $\sin 2\theta_0 = \sin(180^\circ - 2\theta'_0)$, se concluye de la ecuación 17 que existen dos valores diferentes de los ángulos iniciales para los cuales se obtiene el mismo alcance. La relación entre ambos ángulos está dada en la siguiente igualdad:

$$\theta_0 + \theta'_0 = 90^\circ \quad (18)$$

Esta última relación nos indica que un proyectil tendrá el mismo alcance bajo la misma rapidez inicial cuando la suma de los ángulos de disparo sea igual a 90 grados. Por ejemplo, un objeto lanzado a un ángulo de 30 grados tiene el mismo alcance que un objeto lanzado con la misma rapidez inicial, pero a un ángulo de 60 grados. Como se mencionó, el alcance es máximo cuando el proyectil es lanzado a 45 grados de inclinación. Así, para ángulos menores a 45 grados, un proyectil tendrá mayor alcance conforme el ángulo de disparo aumente. Para ángulos mayores a los 45 grados, el alcance disminuirá conforme el ángulo de disparo aumente.

Para que un proyectil logre que la altura máxima alcanzada sea igual a su alcance, el ángulo de disparo o inicial debe ser igual a 76 grados aproximadamente, es decir:

$$\theta_0 \cong 76^\circ.$$

Por otra parte, si el ángulo θ_0 está por debajo de la horizontal como, por ejemplo, en el movimiento de una pelota después de abandonar un plano inclinado, se aplican las mismas ecuaciones, con la diferencia de que el ángulo de partida o inicial es negativo. En esta situación, la componente horizontal de la velocidad permanece inalterada e igual a $v_0 \cos \theta_0$. El movimiento vertical es similar al de un cuerpo lanzado hacia abajo con una componente vertical de la velocidad dada por $v_0 \sin \theta_0$, que es ahora una cantidad negativa.

METODOLOGÍA:

El sistema desarrollado en el presente trabajo, está basado en la teoría anteriormente descrita. Utilizando las ecuaciones 2 y 4 calculamos la máxima y la mínima posición adquirida por los objetos para un intervalo de tiempo particular. Estos valores son empleados para ajustarlos al tamaño del cuadro de dibujo en la que son desplegadas las gráficas, evitando con ello que algún sector de las mismas quede fuera de la ventana de despliegue. De igual forma, los valores máximos y mínimos son utilizados para establecer la ecuación de equivalencia entre la posición y las dimensiones del mismo cuadro. Al activar el usuario la rutina que construye las gráficas, el programa calcula la posición de los objetos para cada instante y establece el lugar que le corresponde en el cuadro de dibujo, por medio de la ecuación de equivalencia. Cada uno de estos lugares es marcado con un pixel cuyo color depende del objeto que representa. La unión de los puntos marcados forman las gráficas que representan la simulación. Los valores de las escalas se calculan dividiendo el intervalo entre el máximo y el mínimo de las posiciones con el número de puntos que contiene la escala.

Asimismo, la ubicación de los ejes dentro del cuadro de imagen, depende de los valores máximos y mínimos alcanzados por los objetos en la simulación.

CONCLUSIONES:

1. El sistema presenta una interfase gráfica de fácil manejo, ya que permite al usuario introducir los valores de cada parámetro a través de barras de desplazamiento.
2. La rutina que grafica, calcula automáticamente las escalas en los ejes, tanto vertical como horizontal, de acuerdo con los valores de los parámetros que sean introducidos.
3. El usuario podrá activar la rutina que grafica cuantas veces desee, sin necesidad de actualizar los valores de los parámetros que rigen los movimientos de los proyectiles.
4. Una de las principales ventajas del programa es que, con los datos introducidos, se podrá predecir el movimiento de los objetos antes de activar la rutina de graficación. Esto es muy importante porque permite al usuario comprobar sus hipótesis al observar las trayectorias de los proyectiles.
5. El usuario podrá observar completamente las gráficas dentro del cuadro diseñado para este propósito, ya que el sistema las ajusta automáticamente.
6. Con el sistema el usuario podrá comprobar los resultados establecidos en la parte de la discusión del presente trabajo..
7. Finalmente, creemos que el sistema es un medio efectivo que permite la interactividad entre la computadora y el usuario.

BIBLIOGRAFÍA:

1. Alonso, Marcelo; Finn, Edward J. Física Vol. I: Mecánica. Fondo Educativo Interamericano. 1976.

2. Ceballos, Francisco Javier. Enciclopedia de Visual Basic 4. Ra-Ma. 1997.
3. Fuller, Gordon. Geometría Analítica. CECSA. 1975.
4. Resnick, Robert; Halliday, David. Física. Vol I. CECSA. 1980.
5. Sears, Francis W; Zemansky, Mark; Young, Hugh D. Física Universitaria. Addison-Wesley Iberoamericana. 1988.
6. Weiskamp, Keith; Heiny, Loren. Gráficas Poderosas con Turbo C++. Noriega Editores. 1994.
7. Wooton, William; Beckenbach, Edwin F; Fleming, Frank J. Geometría Analítica Moderna. Publicaciones Cultural S.A. 1978.