



¿CUANTO TARDA UNA PELOTA EN DEJAR DE BOTAR?

Guillermo Becerra Córdova

Área de Física, Dpto. Preparatoria Agrícola,

Universidad Autónoma Chapingo,

Chapingo, Texcoco, Estado de México, México,

E-mail: gllrmbecerra@yahoo.com

RESUMEN

Alguna vez se ha preguntado: ¿cuánto tiempo tarda una pelota en dejar de botar al ser soltada desde una cierta altura? La solución a esta interrogante involucra los temas de caída libre y colisiones elásticas, lo que incluye los conceptos de rapidez, aceleración de la gravedad y coeficiente de restitución. Así, la rapidez con la que rebotará la pelota dependerá del valor de la rapidez con la que llegue al suelo y del coeficiente de restitución entre la superficie y la pelota. En una colisión perfectamente inelástica el coeficiente de restitución será igual a cero y la pelota se quedará adherida después de la primera colisión. En cambio, en una colisión perfectamente elástica, el coeficiente de restitución será igual a uno, por lo que la pelota rebotará con la misma rapidez que con la que llegue al suelo, siguiendo este movimiento indefinidamente. Si el coeficiente de restitución se encuentra entre cero y uno, que es la mayor parte de las colisiones, la rapidez de la pelota irá disminuyendo en cada rebote hasta que se detenga. De esta forma, el tiempo que tarde la pelota en dejar de botar será igual a la suma de los tiempos que tarda la pelota entre cada rebote. Esta suma corresponde a una suma infinita, la cual está identificada con una expresión particular. En este trabajo se deduce tal expresión y se muestra una simulación del movimiento de la pelota al ser soltada desde una altura determinada. Para comparar los resultados, la simulación muestra el tiempo calculado a través de la expresión deducida y el tiempo utilizado en la simulación. En este trabajo, el movimiento del objeto se considera en una sola dirección y sin rotación, al igual que se desprecia la fricción provocada por el aire y el tiempo que tarda el objeto en cada rebote.

Palabras Clave: Caída libre, colisiones elásticas, aceleración de la gravedad, coeficiente de restitución, rapidez.

ABSTRACT

At some time you have wondered: how long it takes a ball in stopping the being loosed from a certain height to throw away? The solution to this query involves the topics of free fall and elastic collisions, what includes the concepts of speed, acceleration of the graveness and restitution coefficient. This way, the speed with which the ball will bounce will depend on the value of the speed with which arrives to the floor and of the restitution coefficient between the surface and the ball. In a perfectly inelastic collision the restitution coefficient will be similar to zero and the ball will be stuck after the first collision. In a perfectly elastic collision, the restitution coefficient will be similar to one, for what the ball will bounce with the same speed that with the one that arrives to the floor, following this movement indefinitely. On the other hand, in a perfectly elastic collision, the restitution coefficient will be similar to one, for what the ball will bounce with the same speed that with the one that arrives to the floor, following this movement indefinitely. If the restitution coefficient is among zero and one that it is most of the collisions, the speed of the ball he/she will go diminishing in each rebound until he/she stops. This way, the time that takes the ball in stopping to bounce will be similar to the sum of the times that takes the ball among each rebound. This sum corresponds to an infinite sum, which is identified with a particular expression. In this work such an expression is deduced and a simulation of the movement is shown from the ball to the being loosed from a certain height. To compare the results, the simulation shows the time calculated through the deduced expression and the time used in the simulation. In this work, the movement of the object is considered in a single address and without rotation, the same as the friction is rejected caused by the air and the time that takes the object in each rebound.

Words Key: Free fall, elastic collisions, acceleration of the graveness, restitution coefficient, speed.

1. Introducción

De muchos es conocido que el tiempo que tarda un objeto en caer desde una cierta altura, es un problema que ha sido resuelto desde hace mucho tiempo. De hecho, este tipo de movimientos esta clasificado dentro de lo que se conoce como **movimiento uniformemente acelerado** [1,2] o **movimiento en una dimensión con aceleración constante** [3], en donde el cuerpo se mueve en línea recta y con aceleración constante, es decir, la velocidad cambia uniformemente para iguales intervalos de tiempo.

En el caso de cuerpos que se muevan bajo la acción de la gravedad de la tierra, el valor de su magnitud local o cerca de la superficie terrestre es de $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. En consecuencia, el tiempo que tarde en llegar al suelo un objeto que se ha soltado desde una cierta altura, será igual a:

$$t_0 = v_0 / g \quad 1$$

Donde v_0 es la rapidez del objeto justo antes de llegar el suelo; g es la magnitud local de la aceleración de la gravedad y t_0 es el tiempo que tarda el cuerpo en llegar al suelo.

Generalmente, la velocidad de los objetos cambia después de una colisión. La relación de la velocidad relativa después del choque entre la velocidad relativa antes del mismo, se conoce como coeficiente de restitución.

$$e = \frac{v_1 - u_1}{u_0 - v_0} \quad 2$$

Donde v_0 y u_0 son las velocidades de los cuerpos antes de la colisión y, v_1 y u_1 son las velocidades de los cuerpos después de la misma. Así, si el coeficiente de restitución es igual a uno, la cantidad de movimiento y la energía cinética se conservan. Esta conclusión es relativamente cierta para choques entre cuerpos duros como balines, pelotas de ping pong, pelotas de golf, bolas de billar, etc. Es falsa para cuerpos suaves que rebotan mucho más lentamente cuando chocan. La razón con la que un cuerpo recupera su forma original después de sufrir una deformación viene a ser una medida de su elasticidad o restitución. Si la energía permanece constante en un choque, se dice que la colisión ha sido perfectamente elástica. En este caso no se pierde energía por calor o deformación durante el choque. El choque entre dos cuerpos duros se aproxima a un choque perfectamente elástico. Si los cuerpos que chocan se adhieren entre sí y se mueven como un solo cuerpo después del impacto, se dice que la colisión es perfectamente inelástica. En este caso el coeficiente de restitución es igual a cero. Un papel higiénico mojado que se adhiere al piso después de ser soltado desde una altura determinada o una bala que se incrusta en un bloque de madera, son ejemplos de este tipo de colisiones. La mayor parte de las colisiones caen entre estos dos extremos, por lo que el coeficiente de restitución se encontraría entre cero y uno.

Si el objeto es una pelota con un coeficiente de restitución e entre ella y el piso, y además la colisión es unidimensional, entonces la rapidez con la que rebotará será igual a [4]:

$$v_1 = e v_0 \quad 3$$

Donde v_0 es la rapidez del objeto antes del rebote y v_1 es la rapidez después del mismo. El signo negativo de la expresión 2 no se considera debido a que sólo se está analizando la magnitud de la

velocidad, es decir, su rapidez. Como la masa de la superficie es muy grande en comparación con la masa del objeto, hemos supuesto que la velocidad de la superficie no cambia después de la colisión.

Para el segundo rebote, el tiempo que tarde la pelota en llegar de nuevo al piso será igual a:

$$t_1 = 2 v_1 / g = 2 e v_0 / g \quad 4$$

Para el tercer movimiento, se tiene que el tiempo que tarde en llegar será igual a:

$$t_2 = 2 v_2 / g = 2 e v_1 / g = 2 e^2 v_0 / g \quad 5$$

En consecuencia, el tiempo que tarde la pelota en dejar de botar es igual a la suma infinita de los tiempos que tarde entre cada rebote, es decir:

$$t_{total} = t_0 + t_1 + t_2 + \dots \quad 6$$

Lo que equivale a:

$$t_{total} = v_0 / g + 2 e v_0 / g + 2 e^2 v_0 / g + 2 e^3 v_0 / g + \dots \quad 7$$

Al simplificar, se tiene:

$$t_{total} = \frac{2v_0}{g} (1 + e + e^2 + e^3 + \dots) - \frac{v_0}{g} \quad 8$$

La suma que se encuentra entre paréntesis es una serie infinita. Restando a la serie los coeficientes de restitución, se tiene:

$$1 + e + e^2 + e^3 + \dots - e - e^2 - e^3 - \dots = 1 + e + e^2 + e^3 + \dots - e - e^2 - e^3 - \dots$$

Agrupando:

$$1 = 1 + e + e^2 + e^3 + \dots - (e + e^2 + e^3 + \dots)$$

Factorizando:

$$1 = 1 + e + e^2 + e^3 + \dots - e(1 + e + e^2 + e^3 \dots)$$

Y volviendo a factorizar:

$$1 = (1 - e)(1 + e + e^2 + e^3 + \dots)$$

Por lo que:

$$1 + e + e^2 + e^3 + \dots = \frac{1}{1 - e}$$

Es decir:

$$1 + e + e^2 + e^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} e^i = \frac{1}{1-e} \quad 9$$

Esta serie también es posible deducirla desarrollando la función en serie de potencias. Para ello es necesario que tanto la función como todas sus derivadas estén definidas para $e=0$. En este caso la función es:

$$f(e) = \frac{1}{1-e}$$

Al expresar la función por medio de la serie de Maclauring con $e=0$ [5], se obtiene:

$$\begin{aligned} f'(0) &= 1! \\ f''(0) &= 2! \\ f'''(0) &= 6 = 3! \\ f^{iv}(0) &= 24 = 4! \\ &\vdots \end{aligned}$$

La función queda representada por medio de la siguiente serie:

$$\frac{1}{1-e} = 1 + \frac{1!}{1!}e + \frac{2!}{2!}e^2 + \frac{3!}{3!}e^3 + \frac{4!}{4!}e^4 + \dots = 1 + e + e^2 + e^3 + e^4 + \dots$$

La serie anterior es una serie convergente para $0 \leq e < 1$. En consecuencia, la ecuación 8 toma la forma siguiente:

$$t_{total} = \frac{2 v_0}{g} \left[\frac{1}{1-e} \right] - \frac{v_0}{g} \quad 10$$

Como generalmente es difícil conocer la rapidez v_0 con la que llega la pelota al suelo en el primer rebote, creemos conveniente expresar la ecuación anterior en función de la altura a la que se deja caer el cuerpo. Es decir:

$$v_0 = \sqrt{2gh_0} \quad 11$$

Sustituyendo la ecuación 11 en la ecuación 10, se obtiene:

$$t_{total} = 2 \left(\frac{2h_0}{g} \right)^{1/2} \left[\frac{1}{1-e} \right] - \left(\frac{2h_0}{g} \right)^{1/2} \quad 12$$

Con h_0 igual a la altura a la que se suelta la pelota. Para calcular experimentalmente el coeficiente de restitución, se deja caer la pelota desde una altura determinada y se mide la altura a la que llega después del primer rebote. Con este par de datos se puede calcular el coeficiente con solo sustituir en la siguiente ecuación [6]:

$$e = \frac{v_1}{v_0} = \left[\frac{2 g h_1}{2 g h_0} \right]^{1/2} = \left[\frac{h_1}{h_0} \right]^{1/2} \quad 13$$

Donde v_0 es la rapidez con la que llega la pelota al suelo y v_1 es la rapidez de la pelota después del rebote; h_0 es la altura desde la que es soltada la pelota y h_1 es la altura a la que llega la pelota después del rebote. Así, el coeficiente resultante es una propiedad conjunta de la pelota y de la superficie de rebote.

Con las ecuaciones 12 y 13 es posible calcular teóricamente el tiempo que tarda una pelota en dejar de botar al ser soltada desde una altura h_0 .

En esta deducción estamos suponiendo que el coeficiente de restitución es independiente de la rapidez con la que se lleva a cabo la colisión entre la pelota y el suelo. Sin embargo, esta hipótesis no es del todo verdadera, ya que se ha notado que el coeficiente de restitución varía en función de la altura desde la cual es soltada la pelota. Este trabajo no tiene por objetivo deducir esta dependencia. De igual forma, se desprecia el tiempo utilizado en cada colisión.

En la ecuación 12 observamos que si el coeficiente de restitución sería igual a cero, la pelota no rebotaría, quedando pegada al suelo. En este caso el tiempo total se simplificaría a:

$$t_{total} = \left(\frac{2h_0}{g} \right)^{1/2} \quad 14$$

Por otra parte, si el coeficiente de restitución fuese igual a 1, al sustituir en la ecuación 8 se observará que el tiempo total tenderá a un valor infinito, es decir:

$$t_{total} = \left[\frac{2v_0}{g} (1 + 1^1 + 1^2 + 1^3 + \dots) - \frac{v_0}{g} \right] \rightarrow \infty \quad 15$$

Que corresponde al tiempo que tarda una pelota que siempre rebota a la misma altura.

2. Resultados

En la figura 1 se muestra la ventana principal del sistema que se elaboró como resultado del proyecto. En ella aparece el nombre del tema a tratar, el lugar donde se elaboró, los autores y finalmente dos opciones: **Salir** y **Continuar**. Si el usuario no desea continuar, solo debe hacer clic en el botón **Salir** para detener el programa. El sistema fue desarrollado utilizando el lenguaje Visual Basic donde se emplean las herramientas de animación por medio de gráficos [7]. Visual Basic es un sistema de desarrollo diseñado especialmente para crear aplicaciones con interfaz gráfica, de forma muy rápida y sencilla. Para soportar este tipo de desarrollos, Visual Basic utiliza fundamentalmente dos herramientas, una que permite realizar los diseños gráficos y un lenguaje de alto nivel.



Figura 1. Aspecto de la ventana principal del programa Colisiones Elásticas y Caída Libre.

Al hacer clic en el botón **Continuar**, aparecerá la ventana que se muestra en la figura 2. En ella se observa una barra de desplazamiento que sirve para introducir los valores del coeficiente de restitución. También se muestran las cajas de texto correspondientes al tiempo total utilizado

entre cada rebote de la pelota, la altura máxima alcanzada para cada rebote, la rapidez con la que choca el objeto con la superficie, la rapidez con la que rebota y el tiempo teórico calculado con la ecuación 12.



Figura 2. Ejemplo del movimiento de la pelota para un coeficiente de restitución dado.

Después de escoger un coeficiente de restitución determinado, se podrá activar la animación por medio del botón de comando **Iniciar Movimiento**. Conforme la simulación transcurre, en los cuadros de texto correspondientes, se mostrará el tiempo de movimiento de la simulación, la altura máxima que alcanzará en cada rebote, la rapidez con la que choca, la rapidez con la que rebota y el tiempo teórico de todo el movimiento. El usuario podrá observar diferentes movimientos para diferentes coeficientes de restitución. Con la barra de desplazamiento se podrán introducir coeficientes de restitución de hasta centésimas de unidad.

Para el caso de que el coeficiente de restitución sea igual a cero, la simulación mostrará que la pelota no rebotará, quedándose adherida a la superficie. Para valores mayores a cero y menores a uno, se observará que en cada rebote la pelota alcanzará una cierta altura que dependerá del valor del coeficiente de restitución. Para un valor del coeficiente de restitución igual a uno, la

simulación mostrará que la pelota rebotará siempre a la misma altura, permaneciendo el movimiento indefinidamente, ya que no existe alguna fuerza que la detenga.

Una de las ventajas de la simulación, es que es posible utilizar valores del coeficiente de restitución que no correspondan con la realidad. Así, es posible introducir un valor mayor a uno para analizar el movimiento del objeto. Se observará que la altura a la que rebotará la pelota es mayor a la altura a la que se dejó caer. De este modo, en cada rebote, la pelota alcanzará una altura cada vez mayor. El sistema tiene una instrucción que le indica a la computadora que detenga la simulación cuando el objeto ha alcanzado una cierta altura.

Finalmente, los efectos producidos por la resistencia del aire y la rotación del objeto, son despreciados en esta simulación. De igual forma, se considera que el movimiento del objeto es en una sola dirección y que el tiempo utilizado en cada colisión, el cual depende de los materiales que constituyen el piso y la pelota, es despreciable.

3. Conclusiones

- A pesar de que la suma de los tiempos que tarda una pelota en cada rebote es infinita, el resultado converge a un valor determinado que corresponde con el tiempo total del movimiento.
- El sistema muestra la simulación para cada valor del coeficiente de restitución que introduzca el usuario. Con ello podrá observar el comportamiento del movimiento de la pelota para cada caso.
- La suma de los tiempos que tarda la pelota en cada rebote, coincide con el tiempo teórico total. Con ello se pretende comparar los resultados de la simulación con los resultados calculados teóricamente.

- No existen valores del coeficiente de restitución mayores a uno. Para este caso, la simulación tiene la propiedad de mostrar lo que sucedería con los rebotes y la velocidad de la pelota.

1. V. Beltrán, E. Braun, *Principios de Física* (Editorial Trillas, México, D.F., 1975) p. 31.
2. F. W. Sears, M. Zemansky, H. D. Young, *Física Universitaria* (Addison-Wesley Iberoamericana, México, D.F., 1988).
3. R. Resnick, D. Holliday. *Física, Volumen I* (Editorial CECSA, México, D.F., 1981) p. 49.
4. P. E. Tippens, *Física, Conceptos y Aplicaciones* (Editorial McGraw-Hill, México, D.F., 1978) p. 103.
5. F. Ayres, *Cálculo Diferencial e Integral* (Ed. Mc Graw-Hill, México, D.F., 1971) p. 242.
6. P. E. Tippens, *Física, Conceptos y Aplicaciones* (Editorial McGraw-Hill, México, D.F., 1978) p. 103.
7. F. J. Cevallos, *Enciclopedia de Visual Basic* (Alfa Omega Grupo Editor, México, D.F., 1997).