PROYECTILES

Guillermo Becerra Córdova
Área de Física
Departamento de Preparatoria Agrícola
Universidad Autónoma Chapingo
E–mail: gllrmbecerra@yahoo.com

RESUMEN

En el estudio del movimiento de un proyectil se considera, además de la resistencia del aire, el efecto del viento, las variaciones de la intensidad de la gravedad con la altura, la rotación, la curvatura de la tierra y aún otros factores. En este trabajo se deduce y se analiza la ecuación que describe la trayectoria seguida por los proyectiles, suponiendo únicamente la influencia de la resistencia del aire. Para la deducción de esta ecuación, hemos considerado que la resistencia que presenta el aire al movimiento del proyectil, es proporcional a su velocidad. Con esta hipótesis y con el hecho de que el movimiento se separa en dos componentes para su análisis, se establece un par de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Las soluciones a la ecuaciones diferenciales describen la posición del objeto en cada dirección en función del tiempo. Al combinarlas, se obtiene la relación que establece la posición vertical del proyectil en función de su posición horizontal. Si despreciamos la resistencia del aire, se observa que las soluciones a las ecuaciones diferenciales se transforman en las ecuaciones correspondientes al Tiro Parabólico. El objetivo del trabajo es que el usuario observe, a través del sistema, la influencia de los diferentes parámetros que intervienen en el movimiento de los proyectiles.

Palabras Clave: Proyectil, Trayectoria, Resistencia del Aire, Coeficiente de Amortiguamiento, Gravedad.

Introducción:

El movimiento de un cuerpo en una superficie plana es un movimiento en dos dimensiones. Para localizar el cuerpo se requieren, en general, dos coordenadas. Los proyectiles son un ejemplo de movimiento en dos dimensiones. Se llama proyectil a cualquier objeto que es lanzado por algún agente y continúa en movimiento en virtud de su propia inercia, siguiendo una trayectoria determinada por la fuerza que actúan sobre él. Una bola disparada por un cañón, una piedra lanzada al aire o una pelota que cae por el bordo de una mesa, son casos particulares de proyectiles.

El camino seguido por un proyectil se denomina trayectoria. Los proyectiles describen trayectorias curvilíneas, las cuales pueden separarse en una componente horizontal y en otra vertical. La componente horizontal del movimiento de un proyectil es totalmente independiente de la componente vertical. Sus efectos combinados producen toda la gama de trayectorias que describen los proyectiles. La trayectoria de un proyectil se puede analizar considerando por separado sus componentes horizontal y vertical.

La trayectoria que describe un proyectil que sólo se acelera en la dirección vertical, moviéndose con velocidad horizontal constante, se llama parábola. Cuando un proyectil se lanza sin rotación en el vacío la trayectoria es parabólica; si el proyectil se lanza en el aire, la parábola se deforma en virtud de la resistencia del medio, sobre todo en su segunda mitad. El aire es un obstáculo de extraordinaria importancia para un proyectil. Para un objeto que es lanzado con un ángulo de elevación de 45^0 y una velocidad de 620 m/s, el objeto describiría un enorme arco de 10 Km. de altura y su alcance sería cerca de 40 Km. Pero en realidad, un proyectil disparado con el ángulo de elevación y la velocidad inicial anterior, describe un arco de curva relativamente pequeño y solo alcanza 4 Km. Esto como resultado de la resistencia del aire.

En realidad, en el estudio de la trayectoria de un proyectil, que tiene por objeto predecirla, y que es de importancia enorme en la guerra, hay que tener en cuenta, además de la resistencia del aire, el efecto del viento, la rotación y la curvatura de la tierra y las variaciones de la intensidad de la gravedad con la altura y aun otros factores. Pero la misma trayectoria en el vacío, cuando se tiene en cuenta la acción terrestre, cambia de forma según varíe la velocidad inicial respecto a $k=\sqrt{Rg}$, donde R es el radio de la tierra y g es la aceleración de la gravedad. Si la inclinación del tiro es diferente de cero y $v_0 \le k$; la trayectoria es una elipse con su foco más distante en el centro de la tierra. Si la inclinación es nula y $v_0 = k$, la trayectoria es una circunferencia concéntrica con la tierra. Si la inclinación es diferente de cero y la velocidad inicial crece, la trayectoria es una elipse con su foco más próximo en el centro de la tierra, y si $v_0 = k$, la trayectoria es parabólica y el proyectil se escapa de la tierra. Si $v_0 > k$, la órbita es una hipérbola.

Teoría:

En un medio resistente como el aire, el movimiento de un proyectil se basa en la siguiente ecuación diferencial:

$$m\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} + c\frac{d\bar{x}}{dt} + mg = 0 \qquad (1)$$

Donde $\bar{x}$ que es el vector que define la posición del proyectil; t es el tiempo; m es la masa del proyectil; g es la aceleración de la gravedad y c es el coeficiente de amortiguamiento del aire. En el planteamiento de la ecuación, se supone que la resistencia que presenta el aire al movimiento, es proporcional a la velocidad del objeto. Separando la ecuación diferencial en sus componentes x y y, obtenemos:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} = 0 \qquad (2)$$

y

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+c\frac{dy}{dt}+mg=0 \qquad (3)$$

Al resolver la ecuación diferencial (2), la posición del objeto en la dirección horizontal está dada por:

$$x=x_0+\frac{m}{c}v_{x_0}\left[1-e^{-c(t-t_0)/m}\right] \qquad (4)$$

Con

$$v_{x_0}=v_0\,Cos\theta_0 \qquad (5)$$

donde v_0 y θ_0 es la rapidez y el ángulo inicial con el que es disparado el proyectil, respectivamente; x es la posición horizontal al tiempo t y se le conoce como posición horizontal final; x_0 y v_{x_0} es la posición y la velocidad horizontal al tiempo t_0 y se conocen como posición y velocidad horizontal inicial, respectivamente.

La ecuación 4 nos indica que la posición horizontal del proyectil en función del tiempo crece asintóticamente al valor de $x_0+mv_{x_0}/k$. Esto nos indica que el movimiento del proyectil en la dirección horizontal tenderá a frenarse debido a la resistencia del aire, con lo que finalmente su trayectoria será exclusivamente vertical. Observe la figura 1.

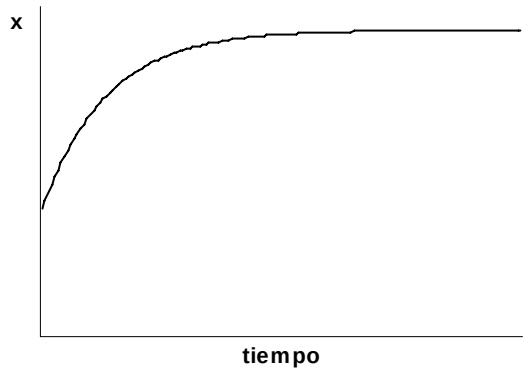

Figura 1

Derivando la ecuación (4) con respecto del tiempo, se observa que la velocidad del objeto en la dirección x es:

$$v_x=v_{x_0}e^{-c(t-t_0)/m} \qquad (6)$$

la cual nos indica que la velocidad no es constante, tiende a cero conforme transcurre el tiempo de vuelo debido a la resistencia del aire. Observe la figura 2.

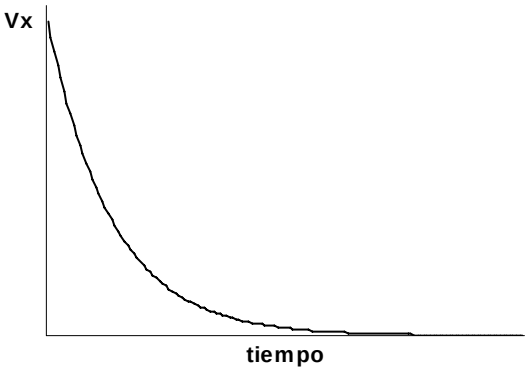

Figura 2

Al despreciar la resistencia del aire, el movimiento del proyectil se convertirá en tiro parabólico. En esta clase de movimientos, la velocidad en la dirección horizontal de la trayectoria seguida por el proyectil es constante. Al despreciar la resistencia del aire el valor de c tiende a cero, por lo que la ecuación (4) se transformará en:

$$x=x_0+v_{x_0}(t-t_0) \qquad (7)$$

que corresponde con la ecuación del Movimiento Rectilíneo Uniforme y a la posición horizontal del objeto en el tiro parabólico. Esta ecuación representa un línea recta, por lo que el proyectil recorrerá en la dirección horizontal distancias iguales en tiempos iguales.

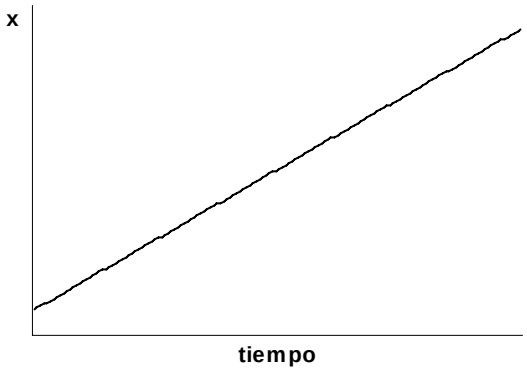

Figura 3

Por otra parte, resolviendo la ecuación diferencial (3), la posición del objeto en la dirección vertical es igual a:

$$y = y_0 - \frac{mg}{c}(t - t_0) + \frac{m}{c}\left[v_{y_0} + \frac{mg}{c}\right]\left[1 - e^{-c(t-t_0)/m}\right] \quad (8)$$

con

$$v_{y_0} = v_0 \, Sen\theta_0 \quad (9)$$

al igual que en el caso anterior, v_0 y θ_0 son la rapidez y el ángulo inicial con el que es disparado el proyectil, respectivamente; y es la posición vertical del cuerpo al tiempo t y se le conoce como posición vertical final; y_0 y v_{y_0} son la posición y la velocidad vertical del proyectil al tiempo t_0 y se conocen como posición y velocidad vertical inicial, respectivamente.

Observe en la figura 4 que si el proyectil es lanzado hacia arriba, después de un cierto tiempo alcanzará la altura máxima y descenderá adquiriendo una velocidad de caída constante provocado por la fricción con el aire. La parte derecha de la gráfica se asemeja a una línea recta, la cual nos indica que la velocidad en ese intervalo no cambia.

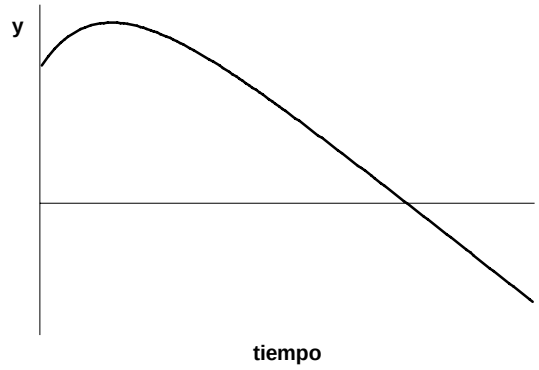

Figura 4

Lo anterior también se puede comprobar al derivar la ecuación (8) con respecto del tiempo. Por definición esta derivada es igual a la velocidad del proyectil en la dirección vertical. Por lo tanto, tenemos que la velocidad del objeto en la dirección *y* es:

$$v_y = -\frac{mg}{c} + \left[v_{y_0} + \frac{mg}{c}\right] e^{-c(t-t_0)/m} \quad (10)$$

la cual contiene una función exponencial con un argumento negativo, por lo que disminuye a cero conforme transcurra el tiempo. La figura 5 muestra la gráfica correspondiente con esta ecuación. En ella se observa que el máximo valor de la velocidad del proyectil en la dirección vertical es justo al comienzo del movimiento.

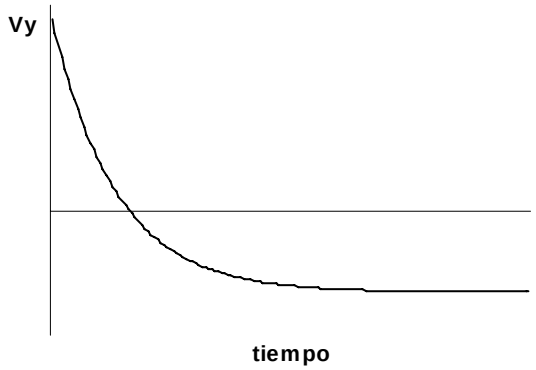

Figura 5

Igualando a cero la ecuación (10) y despejando el tiempo, se obtiene:

$$t_{\max} = t_0 + \frac{m}{c}\ln\left[1 + \frac{cv_{y_0}}{mg}\right] \quad (11)$$

donde $t_{\max}$ es el tiempo que tarda en alcanzar el proyectil la altura máxima. Sustituyendo esta ecuación en la ecuación (8) encontramos que la altura máxima alcanzada, está dada por la siguiente relación:

$$y_{\max} = y_0 - \frac{m^2 g}{c^2}\ln\left[1 + \frac{cv_{y_0}}{mg}\right] + \frac{mv_{y_0}}{c} \quad (12)$$

Así, si el ángulo de disparo es igual a cero, es decir $v_{y_0} = 0$, la altura máxima coincide con y_0.

Al despreciar la resistencia del aire, el valor de c tenderá a cero, por lo que la ecuación (8) se transformará en:

$$y = y_0 + v_{y_0}(t - t_0) - g(t - t_0)^2/2 \quad (13)$$

que corresponde con la ecuación del Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado y a su vez a la posición vertical final en el Tiro Parabólico. La figura 6 muestra la gráfica de la posición vertical en función del tiempo para este tipo de movimientos. Como la ecuación contiene términos cuadráticos, la gráfica es una parábola que abre hacia abajo debido a que

la aceleración de la gravedad le precede el signo negativo.

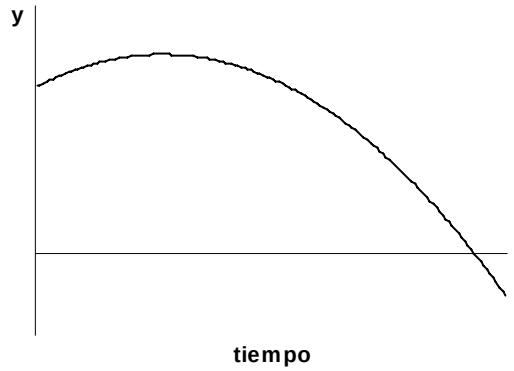

Figura 6

El cruce de la parábola con el eje vertical corresponde al tiempo en que es lanzado el proyectil y el cruce con el eje horizontal es el tiempo al que llega al suelo.

Al derivar la ecuación (13) se transforma en la ecuación de la velocidad en la dirección vertical en función del tiempo:

$$v_y = v_0\, sen\theta_0 - g(t - t_0) \qquad (14)$$

por medio de esta ecuación podremos calcular la velocidad del proyectil en la dirección vertical con sólo conocer el tiempo de vuelo, al igual que la rapidez y ángulo inicial. Igualando a cero esta ecuación, observamos que el tiempo que tarda el proyectil en alcanzar la altura máxima es:

$$t_{\max} = t_0 + \frac{v_0\, sen\theta_0}{g} \qquad (15)$$

La altura máxima alcanzada por el proyectil, se calcula sustituyendo la ecuación (15) en la ecuación (13), obteniéndose la siguiente expresión:

$$y_{\max} = y_0 + \frac{v_0^2\, sen^2\theta_0}{2g} \qquad (16)$$

El máximo valor de y_{max} es cuando el proyectil se lanza verticalmente ya que $\theta_0 = 90^0$, $\text{sen}\,\theta_0 = 1$ y $y_{\max} = y_0 + v_0^2/2g$. Si se lanza horizontalmente, $\theta_0 = 0^0$ y la altura máxima sería igual a y_0.

Las ecuaciones (4) y (6) determinan a x y a y en función del parámetro común $(t - t_0)$ que es el tiempo de vuelo. Combinándolas y eliminando a $(t - t_0)$, obtenemos:

$$y = y_0 + \frac{m^2 g}{c^2}\ln\left[1 - \frac{c(x - x_0)}{m v_{x_0}}\right] + \left[v_{y_0} + \frac{mg}{c}\right]\left[\frac{x - x_0}{v_{x_0}}\right] \qquad (17)$$

que corresponde a la ecuación de la trayectoria descrita por el proyectil para un movimiento en el cual el cuerpo se desplaza dentro de un medio resistente como el aire. La figura 7 muestra la gráfica correspondiente con esta ecuación. Observe en la gráfica que el proyectil es lanzado hacia arriba, alcanza su altura máxima y finalmente desciende. En el descenso la velocidad en la dirección horizontal es cero, por lo que ya no hay desplazamiento en esa dirección. En la dirección vertical, después de cierto tiempo de iniciado el movimiento, la velocidad de descenso será constante como anteriormente se demostró. En la figura se puede apreciar que la forma de la gráfica depende esencialmente del coeficiente de amortiguamiento. Si el coeficiente es muy pequeño, la gráfica será muy similar a una parábola.

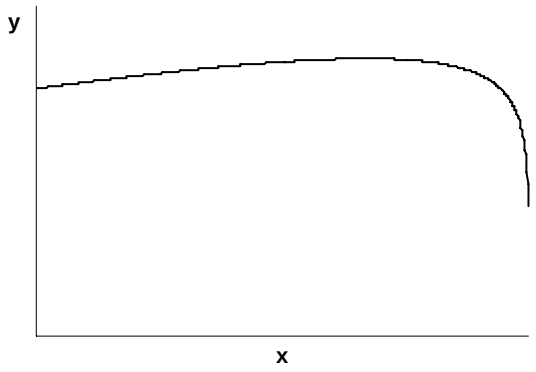

Figura 7

Al despreciar la resistencia del aire, el valor de c tenderá a cero, por lo que la ecuación (17) se transformará en:

$$y = y_0 + (\tan\theta_0)(x - x_0) - \frac{g}{2(v_0\cos\theta_0)^2}(x - x_0)^2 \qquad (18)$$

que relaciona a y con x y es la ecuación de la trayectoria del proyectil para el tiro parabólico. Como x_0, y_0, θ_0, v_0 y g son constantes, la ecuación anterior corresponde a la ecuación de una parábola cuyo eje es paralelo al eje y. Es prudente aclarar que en

todo el desarrollo de la simulación, hemos considerado que el valor de la aceleración de la gravedad es igual a 9.8 m/s^2. La figura 8 muestra la trayectoria seguida por un proyectil en un movimiento en el que se desprecia la resistencia del aire. Como se puede observar, la trayectoria es parabólica en la que su concavidad se dirige hacia abajo, debido al signo negativo que se antepone al valor de la gravedad. El cruce de la parábola con el eje vertical representa la posición a la que fue lanzado el proyectil y el cruce con el eje horizontal es el punto al cual el proyectil llega al suelo.

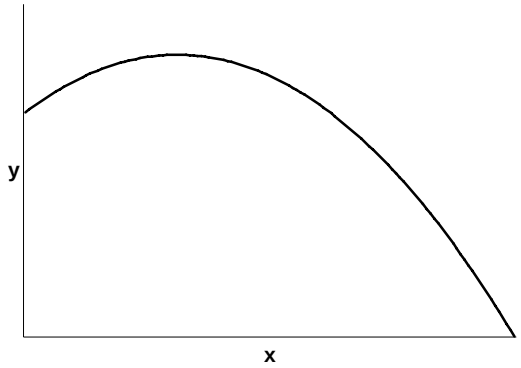

Figura 8

La rapidez v_0 del proyectil al instante t_0 o rapidez inicial es igual a la magnitud de la velocidad inicial, es decir:

$$v_0 = \sqrt{v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2} \qquad (19)$$

y el ángulo θ_0 que forma el vector velocidad inicial con la horizontal en dicho instante está dado por:

$$\tan\theta_0 = \frac{v_{y_0}}{v_{x_0}} \qquad (20)$$

La rapidez v del proyectil al instante t o rapidez final es igual a la magnitud del vector velocidad, es decir:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad (21)$$

y el ángulo θ que forma el vector velocidad final con la horizontal en dicho instante está dado por:

$$tan\,\theta = \frac{v_y}{v_x} \qquad (22)$$

El vector velocidad es tangente a la trayectoria del proyectil en todos sus puntos. Finalmente debemos mencionar que en la implementación de la simulación, hemos hecho uso de las ecuaciones establecidas en esta sección.

Descripción del Sistema:

En esta sección describiremos el programa que lleva a cabo la simulación del movimiento de los proyectiles. La simulación consiste en gráficas que muestran simultáneamente el movimiento de dos objetos. La figura 9 muestra la distribución de las diversas opciones con las que cuenta

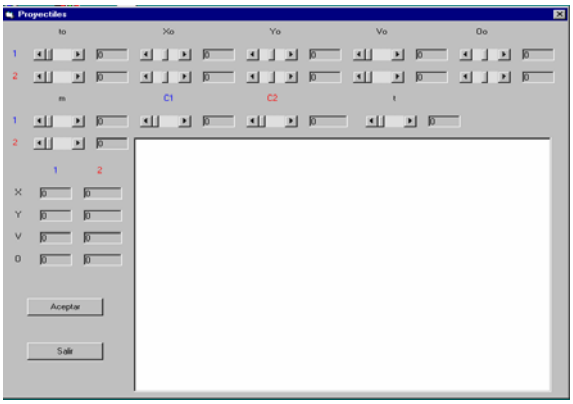

Figura 9

el sistema.

Las barras de desplazamiento que se encuentran en la parte superior de la pantalla, están diseñadas para que el usuario introduzca a través de ellas los valores que caracterizan al movimiento de los proyectiles, como la masas y los coeficientes de amortiguamiento; de los valores iniciales de la posición, del tiempo, de la rapidez y del ángulo inicial x_0, y_0, t_0, v_0 y θ_0. De igual forma, existe una barra de desplazamiento para seleccionar el tiempo de duración de la simulación. Este tiempo es el mismo para ambos cuerpos, ya que hemos considerado que los movimientos terminen simultáneamente. Las cajas de texto colocadas en la parte inferior izquierda, son empleadas para desplegar en ellas, al final de la simulación, los valores de las posiciones, vertical y horizontal, del ángulo que forma el

vector velocidad y de la rapidez de los objetos. La figura 10 muestra, a manera de ejemplo, algunos valores introducidos por el usuario y su respectiva simulación. Se han introducido las mismas condiciones iniciales para los dos cuerpos, con la diferencia de que uno de ellos se mueve en un medio resistente.

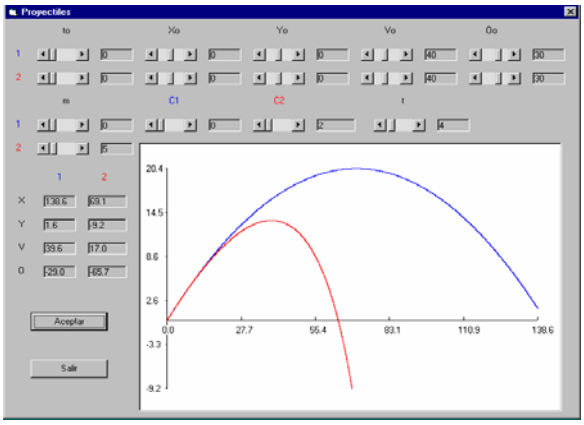

Figura 10

Observe en la figura que las trayectorias seguidas por ambos objetos son diferentes debido a la influencia del medio. El usuario podrá comprobar, a través de las ecuaciones presentadas en la parte teórica, que los valores de la posición, tanto horizontal como vertical, de la rapidez y del ángulo final que forman las trayectorias, corresponden con los desplegados en la simulación. De igual forma, podrá encontrar, a través del programa, el tiempo y la altura alcanzada por alguno de los cuerpos, variando el tiempo la simulación. Observe en la figura que el programa ajusta el tamaño de la gráfica a la caja de dibujo, logrando con ello que las gráficas sean desplegadas íntegramente. También el sistema calcula automáticamente las escalas en ambos ejes.

El objetivo que se persigue es que el usuario pueda observar simultáneamente las trayectorias descritas por ambos objetos al variar los parámetros que rigen sus movimientos.

Conclusiones:

El sistema:

1. Presenta una interfase gráfica de fácil manejo.
2. Es un medio efectivo que permite la interacción entre la computadora y el usuario.
3. Apoya la labor docente.
4. Conduce a un mejor entendimiento del fenómeno que es simulado.
5. Permite identificar el papel que juegan las variables que intervienen en la simulación.
6. Propicia a que el usuario construya sus propias conceptualizaciones.
7. Ajusta, por medio de máximos y mínimos, las gráficas de las trayectorias seguidas por los proyectiles a la ventana de imagen.

Bibliografía:

1. Beltrán, V; Braun, Eliezer. Principios de Física. Trillas. México, 1970.
2. Blanchard. P; Devaney, Robert L; Hall, Glen R. Ecuaciones Diferenciales. International Thomson Editores. México. 1999.
3. Ceballos, Francisco Javier. Enciclopedia de Visual Basic 4. Alfaomega Grupo Editor. 1996.
4. Haaser, Norman B; LaSalle, Joseph P; Sullivan, Joseph A. Análisis Matemático, Curso de Introducción. Trillas. México, 1977.
5. Pobes, José Carlos. El Ordenador y la Enseñanza. Alhambra. 1986.
6. Resnick, Robert; Halliday, David. Física. Vol. I. CECSA. México, 1980.
7. Sears, Francis W; Zemansky, Mark; Young, Hugh D. Física Universitaria. Addison-Wesley Iberoamericana. 1988.
8. Taylor, T; Balintfy, J; Burdick, S; Chu, Kung. Técnicas de Simulación en Computadoras. Noriega Editores. 1988.
9. Wooton, William; Beckenbach, Edwin F; Fleming, Frank J. Geometría Analítica Moderna. Publicaciones Cultural S.A. México. 1978.