



“VECTORES”

Guillermo Becerra Córdova

Universidad Autónoma Chapingo

Dpto. de Preparatoria Agrícola

Área de Física

E-mail: gllrmbecerra@yahoo.com

Resumen

En los cursos de Mecánica del Nivel Medio Superior, se incluye el tema de vectores. Los vectores son importantes porque sin ellos no podrían explicarse muchos conceptos de la Física. Dentro de este tema se especifican las características que deben cumplir las magnitudes vectoriales. En este trabajo se analizan vectores en un plano y se describen las diferentes representaciones y las expresiones que hacen posible transformar una representación en otra. Se utilizan dos tipos de representación: las coordenadas cartesianas y las coordenadas polares. Las coordenadas cartesianas utilizan las abscisas y las ordenadas, las coordenadas polares utilizan la magnitud y la dirección. La suma de vectores se explica a través del método analítico y del método gráfico. Dentro del método analítico se describen tres pasos para sumar vectores que se encuentran expresados en coordenadas polares. La suma de vectores expresados en coordenadas cartesianas es coordenada a coordenada, por lo que se realiza directamente. La suma de vectores se describe gráficamente por dos métodos: el método del paralelogramo y el método del polígono. Con el método del paralelogramo sólo se pueden sumar dos vectores, formando un paralelogramo cuya diagonal, que parte del origen del plano cartesiano, coincide con la resultante. Con el método del polígono se pueden sumar más de dos vectores, los cuales se colocan uno detrás del otro vector para formar un polígono. La flecha que une el origen con la punta de la flecha del último vector, corresponde a la resultante. Finalmente, en este trabajo se incluye un sistema que simula la suma de vectores por el método del paralelogramo y del polígono. El usuario podrá escoger el método gráfico que desee utilizar. Las magnitudes y las direcciones de los vectores a sumar, podrán ser introducidas a través de barras de desplazamiento. Después de introducirlas, el sistema mostrará gráficamente la suma de los vectores de acuerdo con el método elegido. La resultante de la suma se mostrará gráfica y analíticamente.

Palabras clave: Vectores, escalares, paralelogramo, polígono, simulación.

Marco Teórico

Muchas cantidades físicas como la masa, el volumen y el tiempo, pueden especificarse completamente por medio de su magnitud. Son cantidades que no necesitan una dirección. Se trata de cantidades escalares. Estas cantidades satisfacen los axiomas de los números reales. Por ejemplo, si añadimos 3 Kg. de arena a 1 Kg. de cemento, la mezcla resultante tendrá una masa de 4 Kg. Si sacamos 5 litros de agua de un cubo que inicialmente tenía 8 litros, el volumen resultante será de 3 litros. Si durante un viaje que debe durar una hora, nos retrasamos 15 minutos, la travesía durará $1\frac{1}{4}$ horas. En ninguno de estos casos interviene la dirección. Vemos que no tiene sentido hablar de 10 Kg. hacia el norte, 5 litros hacia el este o 15 minutos hacia el sur. Las cantidades que sólo tienen magnitud, pero no dirección, se llaman cantidades escalares.

Para describir completamente algunas cantidades se requiere tanto una magnitud como una dirección. A estas cantidades se les denomina cantidades o magnitudes vectoriales. La palabra vector significa en latín transportador, que sugiere la idea de desplazamiento. Por ejemplo, la velocidad y la fuerza tienen dirección y magnitud y de alguna forma están relacionadas con desplazamientos. Otras cantidades físicas que son vectores: la aceleración, el campo eléctrico y el campo magnético. Muchas leyes de la física pueden expresarse en forma compacta usando vectores; con esta notación, se puede simplificar muchos de los cálculos que conducen a dichas leyes.

Un vector en el plano cartesiano puede ser representado por un par de números o coordenadas encerrados por un paréntesis y separados por una coma. La primera coordenada representa el desplazamiento en la dirección horizontal y la segunda representa un desplazamiento en la dirección vertical. Si el desplazamiento horizontal es positivo, se dice que el desplazamiento es hacia la derecha y si el desplazamiento es

negativo, se dirigirá hacia la izquierda. Equivalentemente, si el desplazamiento en la dirección vertical es positivo se dice que va hacia arriba y negativo en caso contrario.

De esta forma el vector $\vec{A} = (3, 4)$ representa el desplazamiento de un objeto 3 unidades a la derecha y 4 unidades hacia arriba. Una flecha asociada con el vector $\vec{A} = (3, 4)$ que tiene su punto inicial en el origen se llama representación ordinaria. Observe la figura 1.

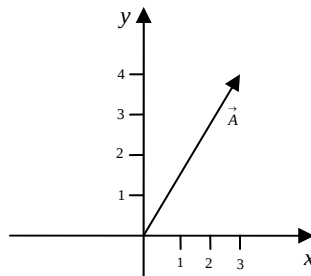


Figura 1

Como cualquier vector $\vec{A} = (x, y)$ se puede visualizar como la representación de una traslación de x unidades en dirección horizontal seguida de una traslación de y unidades en dirección vertical o viceversa, sugiere que al vector se le considere como la suma de dos vectores $(x, 0)$ y $(0, y)$. En general, una traslación representada por el

vector $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$ seguida de otra traslación representada por el vector $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$, produce como resultado una traslación total dada por

$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Esto nos permite definir la adición de dos vectores de la siguiente manera:

Definición 1:

Si $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$ y $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Ejemplos:

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (3, 4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (2, 7) + (3, 4) = (2 + 3, 7 + 4) = (5, 11)$$

Si $\vec{V}_1 = (5, -1)$ y $\vec{V}_2 = (-3, 4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (5, -1) + (-3, 4) = (5 - 3, -1 + 4) = (2, 3)$$

Esta suma se puede generalizar para más de dos vectores.

Si $\vec{V}_1 = (1, 4)$, $\vec{V}_2 = (-2, 6)$, $\vec{V}_3 = (7, -5)$ y $\vec{V}_4 = (9, 8)$ son cuatro vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4 = (1, 4) + (-2, 6) + (7, -5) + (9, 8) = (1 - 2 + 7 + 9, 4 + 6 - 5 + 8) = (16, 13)$$

Definición 2:

Llamamos al vector cero a aquel vector cuyos elementos son cero, es decir: $\vec{0} = (0, 0)$.

Definición 3:

Si $\vec{V} = (x, y)$ es un vector, entonces $-\vec{V} = -(x, y) = (-x, -y)$ es otro vector. Ambos vectores tienen la misma longitud, pero su dirección es contraria. Observe la figura 2.

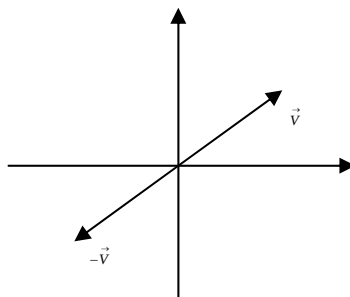


Figura 2

Ejemplos:

Si $\vec{V} = (2, 7)$, entonces $-\vec{V} = -(2, 7) = (-2, -7)$.

Si $\vec{V} = (-2, 7)$, entonces $-\vec{V} = -(-2, 7) = (-(-2), -7) = (2, -7)$.

Si $\vec{V} = (-2, -7)$, entonces $-\vec{V} = -(-2, -7) = (-(-2), -(-7)) = (2, 7)$.

Si $\vec{V} = (2, -7)$, entonces $-\vec{V} = -(2, -7) = (-2, -(-7)) = (-2, 7)$.

La anterior definición nos conduce a la siguiente definición.

Definición 4:

Si $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$ y $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{V}_1 + (-\vec{V}_2) = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1, y_1) + (-x_2, -y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

La cual corresponde a la resta de dos vectores. La resta se define como la suma del inverso aditivo de un vector.

Ejemplos:

Si: $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (3, 4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = (2, 7) - (3, 4) = (2, 7) + (-3, -4) = (2 - 3, 7 - 4) = (-1, 3)$$

Si: $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (-3, 4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = (2, 7) - (-3, 4) = (2, 7) + (3, -4) = (2 + 3, 7 - 4) = (5, 3)$$

Si: $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (-3, -4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = (2, 7) - (-3, -4) = (2, 7) + (3, 4) = (2 + 3, 7 + 4) = (5, 11)$$

Si: $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (3, -4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = (2, 7) - (3, -4) = (2, 7) + (-3, 4) = (2 - 3, 7 + 4) = (-1, 11)$$

En base a estas definiciones presentamos las siguientes propiedades de la suma de vectores:

Propiedad Conmutativa:

Si $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$ y $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$$

Esta propiedad nos indica que se obtiene la misma resultante si al vector $\vec{V}_1$ le sumamos el vector $\vec{V}_2$ o al vector $\vec{V}_2$ le sumamos el vector $\vec{V}_1$.

Ejemplos:

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (3, 4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (2, 7) + (3, 4) = (2 + 3, 7 + 4) = (3 + 2, 4 + 7) = (3, 4) + (2, 7) = \vec{V}_2 + \vec{V}_1.$$

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (-3, 4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (2, 7) + (-3, 4) = (2 - 3, 7 + 4) = (-3 + 2, 4 + 7) = (-3, 4) + (2, 7) = \vec{V}_2 + \vec{V}_1.$$

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (-3, -4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (2, 7) + (-3, -4) = (2 - 3, 7 - 4) = (-3 + 2, -4 + 7) = (-3, -4) + (2, 7) = \vec{V}_2 + \vec{V}_1.$$

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (3, -4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (2, 7) + (3, -4) = (2 + 3, 7 - 4) = (3 + 2, -4 + 7) = (3, -4) + (2, 7) = \vec{V}_2 + \vec{V}_1.$$

Propiedad de Cerradura:

Si $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$ y $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$ son dos vectores, entonces: $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ también es un vector.

Es decir, el vector resultante también tiene dos coordenadas.

Ejemplos:

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (3, 4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (2, 7) + (3, 4) = (2 + 3, 7 + 4) = (5, 11), \text{ también es un vector.}$$

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (-3, 4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (2, 7) + (-3, 4) = (2 - 3, 7 + 4) = (-1, 11), \text{ también es un vector.}$$

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (-3, -4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (2, 7) + (-3, -4) = (2 - 3, 7 - 4) = (-1, 3), \text{ también es un vector.}$$

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (3, -4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (2, 7) + (3, -4) = (2 + 3, 7 - 4) = (5, 3), \text{ también es un vector.}$$

Propiedad Asociativa:

Si $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$, $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$ y $\vec{V}_3 = (x_3, y_3)$ son tres vectores, entonces:

$$(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3 = \vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$$

Esta propiedad nos dice que al sumar tres vectores, primero sumamos dos de ellos y al resultado se le suma el vector restante.

Ejemplos:

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$, $\vec{V}_2 = (3, -4)$ y $\vec{V}_3 = (5, -2)$ son tres vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = (2, 7) + (3, -4) + (5, -2) = (2 + 3, 7 - 4) + (5, -2) = (5, 3) + (5, -2) = (2, 7) + (3 + 5, -4 - 2) = (2, 7) + (8, -6) = (10, 1)$$

Si $\vec{V}_1 = (2, -7)$, $\vec{V}_2 = (3, 4)$ y $\vec{V}_3 = (5, -2)$ son tres vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = (2, -7) + (3, 4) + (5, -2) = (2+3, -7+4) + (5, -2) = (5, -3) + (5, -2) = (2, -7) + (3+5, 4-2) = (2, -7) + (8, 2) = (10, -5)$$

Si $\vec{V}_1 = (2, -7)$, $\vec{V}_2 = (3, 4)$ y $\vec{V}_3 = (5, 2)$ son tres vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = (2, -7) + (3, 4) + (5, 2) = (2+3, -7+4) + (5, 2) = (5, -3) + (5, 2) = (2, -7) + (3+5, 4+2) = (2, -7) + (8, 6) = (10, -1) \quad \text{Si}$$

$\vec{V}_1 = (2, 7)$, $\vec{V}_2 = (3, 4)$ y $\vec{V}_3 = (5, 2)$ son tres vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = (2, 7) + (3, 4) + (5, 2) = (2+3, 7+4) + (5, 2) = (5, 11) + (5, 2) = (2, 7) + (3+5, 4+2) = (2, 7) + (8, 6) = (10, 13)$$

Propiedad Neutro Aditivo:

Si $\vec{V} = (x, y)$ es un vector, entonces:

$$\vec{V} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{V} = \vec{V}$$

Todo vector sumado al vector neutro aditivo es igual al mismo vector.

Ejemplos:

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$ es un vector, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{0} = (2, 7) + (0, 0) = (2+0, 7+0) = (0+2, 0+7) = (2, 7)$$

Si: $\vec{V}_1 = (-2, 7)$ es un vector, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{0} = (-2, 7) + (0, 0) = (-2+0, 7+0) = (0-2, 0+7) = (-2, 7)$$

Si $\vec{V}_1 = (-2, -7)$ es un vector, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{0} = (-2, -7) + (0, 0) = (-2+0, -7+0) = (0-2, 0-7) = (-2, -7)$$

Si $\vec{V}_1 = (2, -7)$ es un vector, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{0} = (2, -7) + (0, 0) = (2 + 0, -7 + 0) = (0 + 2, 0 - 7) = (2, -7).$$

Propiedad Inverso Aditivo:

$$\vec{V} + (-\vec{V}) = \vec{0}$$

A todo vector sumado su inverso aditivo es igual al neutro aditivo.

Ejemplos:

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$ es un vector, entonces:

$$\vec{V}_1 + (-\vec{V}_1) = (2, 7) + (-2, -7) = (2 - 2, 7 - 7) = (0, 0).$$

Si $\vec{V}_1 = (-2, 7)$ es un vector, entonces:

$$\vec{V}_1 + (-\vec{V}_1) = (-2, 7) + (2, -7) = (-2 + 2, 7 - 7) = (0, 0).$$

Si $\vec{V}_1 = (-2, -7)$ es un vector, entonces:

$$\vec{V}_1 + (-\vec{V}_1) = (-2, -7) + (2, 7) = (-2 + 2, -7 + 7) = (0, 0).$$

Si $\vec{V}_1 = (2, -7)$ es un vector, entonces:

$$\vec{V}_1 + (-\vec{V}_1) = (2, -7) + (-2, 7) = (2 - 2, -7 + 7) = (0, 0).$$

Note que las propiedades de adición de los vectores son idénticas a las propiedades de adición de los números reales.

Multiplicación de un escalar por un vector.

Supongamos que se tiene el vector $\vec{V} = (x, y)$ y efectuamos la suma dada por:

$$\vec{V} + \vec{V} + \vec{V} = (x, y) + (x, y) + (x, y) = (x + x + x, y + y + y) = (3x, 3y)$$

Por otra parte:

$$\vec{V} + \vec{V} + \vec{V} = 3\vec{V}$$

Dos cosas iguales a un tercero, son iguales entre sí. Por lo tanto:

$$3\vec{V} = (3x, 3y)$$

Al sumar tres veces el mismo vector, el resultado es equivalente a multiplicar por tres ese vector. En consecuencia se establece la siguiente definición:

Si $\vec{V} = (x, y)$ es un vector y si r es un escalar, entonces se define la multiplicación de un vector por un escalar como:

$$r\vec{V} = r(x, y) = (rx, ry)$$

El vector resultante de la multiplicación de un escalar tiene la misma dirección pero su sentido dependerá del valor que tenga el escalar. Si el escalar es positivo, ambos vectores tendrán el mismo sentido. Si el escalar es negativo, el sentido de ambos vectores serán diferentes y si el escalar es igual a cero, el vector resultante es igual a cero.

Ejemplos:

Si $\vec{V} = (3, 5)$ es un vector, entonces:

$$4\vec{V} = 4(3, 5) = (4 * 3, 4 * 5) = (12, 20)$$

Si $\vec{V} = (-3, 5)$ es un vector, entonces:

$$4\vec{V} = 4(-3, 5) = (4 * (-3), 4 * 5) = (-12, 20)$$

Si $\vec{V} = (-3, -5)$ es un vector, entonces:

$$4\vec{V} = 4(-3, -5) = (4 * (-3), 4 * (-5)) = (-12, -20)$$

Si $\vec{V} = (3, -5)$ es un vector, entonces:

$$4\vec{V} = 4(3, -5) = (4*3, 4*(-5)) = (12, -20)$$

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

Propiedad de Cerradura:

Si $\vec{V} = (x, y)$ es un vector y r es un escalar, entonces: $r\vec{V}$ es un vector.

Propiedad Asociativa:

Si $\vec{V} = (x, y)$ es un vector, r y s es un escalar, entonces: $rs\vec{V}$ es un vector.

Ejemplos:

Si: $\vec{V} = (3, 5)$ es un vector, entonces:

$$(2*4)\vec{V} = 2*(4*(3, 5)) = 2*(4*3, 4*5) = 2*(12, 20) = (24, 40)$$

Si: $\vec{V} = (-2, 5)$ es un vector, entonces:

$$(2*4)\vec{V} = 2*(4*(-2, 5)) = 2*(4*(-2), 4*5) = 2*(-8, 20) = (-16, 40)$$

Si: $\vec{V} = (4, -5)$ es un vector, entonces:

$$((-2)*4)\vec{V} = (-2)*(4*(4, -5)) = (-2)*(4*4, 4*(-5)) = (-2)*(16, -20) = (-32, 40)$$

Si: $\vec{V} = (-3, -3)$ es un vector, entonces:

$$(2*4)\vec{V} = 2*(4*(-3, -3)) = 2*(4*(-3), 4*(-3)) = 2*(-12, -12) = (-24, -24)$$

Propiedad de Neutro Multiplicativo:

$$1\vec{V} = \vec{V}$$

Todo vector no se altera al multiplicarlo por la unidad.

Ejemplos:

Si $\vec{V} = (3, 5)$ es un vector, entonces:

$$1\vec{V} = 1(3, 5) = (1 * 3, 1 * 5) = (3, 5)$$

Si: $\vec{V} = (-3, 5)$ es un vector, entonces:

$$1\vec{V} = 1(-3, 5) = (1 * (-3), 1 * 5) = (-3, 5)$$

Si $\vec{V} = (-3, -5)$ es un vector, entonces:

$$1\vec{V} = 1(-3, -5) = (1 * (-3), 1 * (-5)) = (-3, -5)$$

Si $\vec{V} = (3, -5)$ es un vector, entonces:

$$1\vec{V} = 1(3, -5) = (1 * 3, 1 * (-5)) = (3, -5)$$

Si el producto de un escalar por un vector es igual al vector cero, el vector o el escalar deben ser igual a cero.

$$r\vec{V} = \vec{0} = (0, 0)$$

Ejemplos:

Si: $\vec{V} = (3, 5)$ es un vector, entonces:

$$0\vec{V} = 0(3, 5) = (0 * 3, 0 * 5) = (0, 0)$$

Si $\vec{V} = (-3, 5)$ es un vector, entonces:

$$0\vec{V} = 0(-3, 5) = (0 * (-3), 0 * 5) = (0, 0)$$

Si $\vec{V} = (-3, -5)$ es un vector, entonces:

$$0 \vec{V} = 0 (-3, -5) = (0 * (-3), 0 * (-5)) = (0, 0)$$

Si $\vec{V} = (3, -5)$ es un vector, entonces:

$$0 \vec{V} = 0 (3, -5) = (0 * 3, 0 * (-5)) = (0, 0)$$

Propiedad del Inverso Aditivo:

$$-1 \vec{V} = -\vec{V}$$

Al multiplicar un vector por el escalar -1 el resultado es el inverso aditivo del vector original.

Ejemplos:

Si $\vec{V} = (3, 5)$ es un vector, entonces:

$$-1 \vec{V} = -1 (3, 5) = ((-1) * 3, (-1) * 5) = (-3, -5)$$

Si $\vec{V} = (-3, 5)$ es un vector, entonces:

$$-1 \vec{V} = -1 (-3, 5) = ((-1) * (-3), (-1) * 5) = (3, -5)$$

Si $\vec{V} = (-3, -5)$ es un vector, entonces:

$$-1 \vec{V} = (-1) (-3, -5) = ((-1) * (-3), (-1) * (-5)) = (3, 5)$$

Si $\vec{V} = (3, -5)$ es un vector, entonces:

$$(-1) \vec{V} = (-1) (3, -5) = ((-1) * 3, (-1) * (-5)) = (-3, 5)$$

Propiedad Distributiva con Respecto a la Suma de Vectores.

$$r (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = r \vec{V}_1 + r \vec{V}_2$$

El producto de un escalar por la suma de dos vectores es igual a la suma de los

productos del escalar por los vectores.

Ejemplos:

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (-3, -4)$ son dos vectores, entonces:

$$5(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = 5\vec{V}_1 + 5\vec{V}_2 = 5 * (2, 7) + 5 * (-3, -4) = (5 * 2, 5 * 7) + (5 * (-3), 5 * (-4)) = (10, 35) + (-15, -20) = (-5, 15)$$

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (3, 4)$ son dos vectores, entonces:

$$5(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = 5\vec{V}_1 + 5\vec{V}_2 = 5 * (2, 7) + 5 * (3, 4) = (5 * 2, 5 * 7) + (5 * 3, 5 * 4) = (10, 35) + (15, 20) = (25, 55)$$

Si $\vec{V}_1 = (-2, -7)$ y $\vec{V}_2 = (3, 4)$ son dos vectores, entonces:

$$5(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = 5\vec{V}_1 + 5\vec{V}_2 = 5 * (-2, -7) + 5 * (3, 4) = (5 * (-2), 5 * (-7)) + (5 * 3, 5 * 4) = (-10, -35) + (15, 20) = (5, -15)$$

Si $\vec{V}_1 = (-2, -7)$ y $\vec{V}_2 = (-3, -4)$ son dos vectores, entonces:

$$5(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = 5\vec{V}_1 + 5\vec{V}_2 = 5 * (-2, -7) + 5 * (-3, -4) = (5 * (-2), 5 * (-7)) + (5 * (-3), 5 * (-4)) = (-10, -35) + (-15, -20) = (-25, -55)$$

Propiedad Distributiva con Respecto a la Suma de Escalares:

$$(r + s) \vec{V} = r \vec{V} + s \vec{V}$$

El producto de la suma de dos escalares por un vector es igual a la suma de los productos de los escalares por el vector.

Ejemplos:

Si: $\vec{V} = (3, 5)$ es un vector, entonces:

$$(2 + 4) \vec{V} = 2 * (3, 5) + 4 * (3, 5) = (2 * 3, 2 * 5) + (4 * 3, 4 * 5) = (6, 10) + (12, 20) = (6 + 12, 10 + 20) = (18, 30)$$

Si $\vec{V} = (-3, 2)$ es un vector, entonces:

$$(2 + 4) \vec{V} = 2 * (3, -2) + 4 * (3, -2) = (2 * 3, 2 * (-2)) + (4 * 3, 4 * (-2)) = (6, -4) + (12, -8) = (6 + 12, -4 - 8) = (18, -12)$$

Si $\vec{V} = (-3, -2)$ es un vector, entonces:

$$(2+4)\vec{V} = 2*(-3, -2) + 4*(-3, -2) = (2*(-3), 2*(-2)) + (4*(-3), 4*(-2)) = (-6, -4) + (-12, -8) = (-6-12, -4-8) = (-18, -12)$$

Si $\vec{V} = (3, -2)$ es un vector, entonces:

$$(-2+4)\vec{V} = (-2)*(3, -2) + 4*(3, -2) = ((-2)*3, (-2)*(-2)) + (4*3, 4*(-2)) = (-6, 4) + (12, -8) = (-6+12, 4-8) = (6, -4)$$

Se define la magnitud de un vector como:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2}$$

La magnitud de cualquier vector no es negativa, por lo tanto siempre se debe tomar el signo positivo de la raíz cuadrada.

Para cada vector existe una única magnitud. No existen dos magnitudes diferentes de un mismo vector.

Ejemplos:

Si $\vec{V} = (3, 4)$ es un vector, entonces su magnitud está dada por:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Si $\vec{V} = (-3, 4)$ es un vector, entonces su magnitud está dada por:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Si $\vec{V} = (-3, -4)$ es un vector, entonces su magnitud está dada por:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Si $\vec{V} = (3, -4)$ es un vector, entonces su magnitud está dada por:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Observe que todos estos vectores tienen la misma magnitud, independientemente de su dirección.

Si $\vec{V} = (3.5355, 3.5355)$ es un vector, entonces su magnitud está dada por:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3.5355)^2 + (3.5355)^2} = \sqrt{12.5 + 12.5} = \sqrt{25} = 5$$

Estos resultados nos indican que existe una infinidad de vectores con la misma magnitud.

No es lo mismo que un vector tenga muchas magnitudes a que varios vectores tengan la misma magnitud. El primer caso no puede ser posible.

Si $V = 0$ entonces $\vec{V} = \vec{0} = (0, 0)$ y si $\vec{V} = \vec{0} = (0, 0)$ entonces $V = 0$.

Si $\vec{V} = (x, y)$ es un vector y $\vec{V} \neq \vec{0}$, la dirección del vector $\vec{V}$ es el ángulo θ para el cual:

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ o } \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

El ángulo θ es el ángulo formado por el eje horizontal positivo y el vector. El ángulo es positivo si se mide en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y negativo se mide en sentido contrario.

Si el vector se dibuja en un plano cartesiano, la dirección y sentido de ese vector están determinados completamente por el ángulo que forma la parte positiva del eje de las abscisas y el vector.

En términos de la tangente se tiene que la dirección θ del vector se puede calcular de la siguiente manera:

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

Se puede visualizar la dirección de un vector haciendo un diagrama de un vector que se

encuentre trazado en un plano cartesiano. Observe la figura 3:

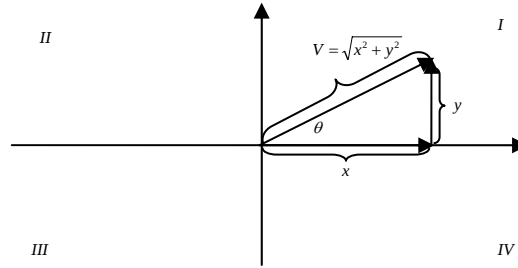


Figura 3

La magnitud del vector $\vec{V}$ es $V = \sqrt{x^2 + y^2}$ y su dirección $\tan \theta = \frac{y}{x}$ ó $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$.

Podemos establecer que un vector lo podemos caracterizar por dos formas.

- 1.- Por un par de coordenadas (x,y) llamadas coordenadas cartesianas: la primera coordenada lleva el nombre de abscisa y representa el desplazamiento horizontal, y la segunda se conoce como ordenada y representa el desplazamiento vertical.
- 2.- Por un par de coordenadas (r,θ) llamadas coordenadas polares. La primera coordenada es la magnitud del vector y la segunda representa su dirección.

Como ambos sistemas de coordenadas describen completamente a un vector, estos sistemas son equivalentes. En consecuencia, a partir de un sistema de coordenadas podemos obtener el otro sistema y viceversa.

Supongamos que se tiene un vector representado por medio de coordenadas polares y queremos representarlo por medio de coordenadas cartesianas, las fórmulas de transformación son:

$$x = V \cos \theta \quad y = V \sin \theta$$

Equivalentemente, si se tiene representado un vector por medio de coordenadas cartesianas y queremos expresarlo por medio de coordenadas polares, las fórmulas de

transformación serían:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

con: $x \neq 0$

El ángulo formado por el vector y el eje horizontal positivo puede tomar valores entre $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$, dependiendo del cuadrante donde se encuentre el vector. Para un vector en el segundo cuadrante, el ángulo θ es mayor a 90° y menor o igual a 180° . Para un vector en el tercer cuadrante, el ángulo θ es mayor a 180° y menor o igual a 270° y para un vector en el cuarto cuadrante, el ángulo θ es mayor a 270° y menor o igual a 360° . En consecuencia, las fórmulas de transformación se deben modificar para que se obtengan las direcciones de los vectores de acuerdo al cuadrante donde se encuentren.

Para vectores en el segundo cuadrante el ángulo dado por la ecuación $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ es el que forma el vector con el eje horizontal negativo, el cual no corresponde con la dirección real del vector. Observe la figura 4. En consecuencia, es necesario sumarle 180° a este valor para obtener su dirección, es decir:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + 180^\circ$$

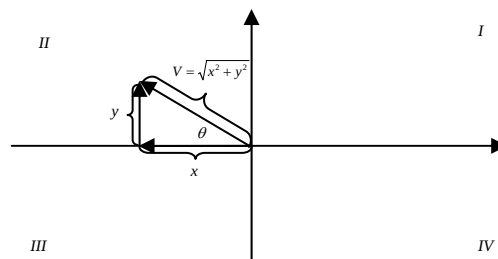


Figura 4

Para vectores en el tercer cuadrante el ángulo dado por la ecuación $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ es el que forma el vector con el eje horizontal negativo, el cual no corresponde con la dirección real del vector. En consecuencia, es necesario sumarle 180^0 a este valor para obtener su dirección, es decir:

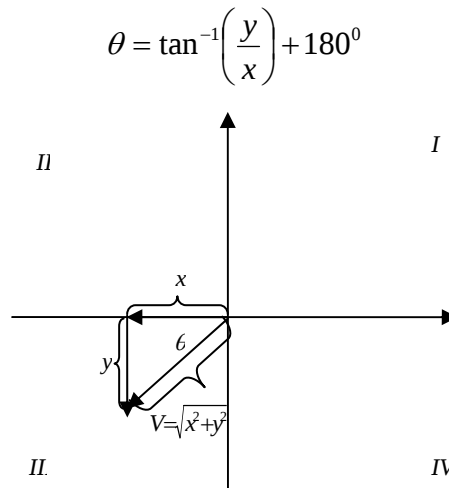


Figura 5

Para vectores en el cuarto cuadrante el ángulo dado por la ecuación $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ es el que forma el vector con el eje horizontal positivo, el cual no corresponde con la dirección real del vector. En consecuencia, es necesario sumarle 360^0 a este valor para obtener su dirección, es decir:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + 360^0$$

Si suponemos que un vector $\vec{V}$ se encuentra representado por coordenadas polares. Las fórmulas de transformación para convertirlas a coordenadas cartesianas están dadas por:

$$x = V \cos \theta \text{ y } y = V \sin \theta$$

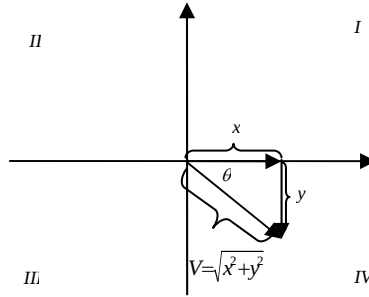


Figura 6

El ángulo formado por el vector y el eje horizontal positivo puede tener valores entre 0° y 360° dependiendo del cuadrante donde se encuentre. Para un vector en el primer cuadrante el ángulo θ se encuentra entre 0° y 90° . Para un vector en el segundo cuadrante el ángulo θ se encontrará entre 90° y 180° ; para el tercer cuadrante, θ se encuentra entre 180° y 270° , y para el cuarto cuadrante, θ se encontrará entre 270° y 360° .

Para un vector en el primer cuadrante la abscisa y la ordenada son positivas. Para un vector en el segundo cuadrante, la abscisa es negativa y la ordenada es positiva. Para el cuarto tercer cuadrante ambas coordenadas son negativas y, finalmente, para un vector en el cuarto cuadrante, la abscisa será positiva y la ordenada negativa. Observe la figura:

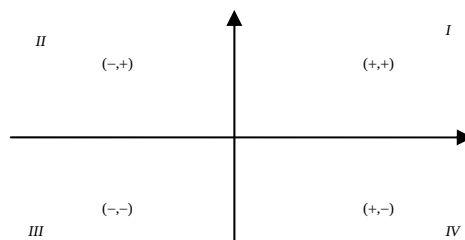


Figura 7

Al aplicar las fórmulas de transformación de coordenadas polares a cartesianas, los signos de cada componente se obtendrán directamente. La siguiente tabla muestra los signos de cada componente dependiendo del valor del ángulo o de la dirección del vector.

Ángulo	Cuadrante	x	y
$0 \leq \theta < 90^\circ$	Primer.	Positivo.	Positivo.
$90^\circ < \theta \leq 180^\circ$	Segundo.	Negativo.	Positivo.
$180^\circ < \theta < 270^\circ$	Tercer.	Negativo.	Negativo.
$270^\circ < \theta < 360^\circ$	Cuarto.	Positivo.	Negativo.

SUMA DE VECTORES: MÉTODO ANALÍTICO.

En esta sección sumaremos vectores que se encuentran expresados en coordenadas polares. A menudo se presentan vectores expresados en coordenadas polares y tenemos necesidad de obtener la resultante de esos vectores al estar aplicados a un punto. Daremos a continuación un método para sumar vectores expresados en forma polar.

El método consiste en tres pasos:

1.- Cuando tenemos un conjunto de vectores expresados en forma polar, es necesario expresarlos en forma cartesiana para poderlos sumar. Las ecuaciones de transformación son las siguientes:

$$x = V \cos \theta \text{ y } y = V \sin \theta$$

2.- Este paso consiste en sumar los vectores expresados en coordenadas cartesianas, sumando abscisas con abscisas y ordenadas con ordenadas. Las fórmulas para realizar

estas operaciones se expresan a continuación:

$$x_t = \sum_{i=1}^n x_i \text{ y } y_t = \sum_{i=1}^n y_i$$

3.- Finalmente es necesario expresar el vector resultante en coordenadas polares. Para ello se utilizan las siguientes fórmulas de transformación:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ y } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ejemplo:

Sume los siguientes vectores utilizando el método analítico para la suma de vectores.

$$\vec{V}_1 = (2, 10^0), \vec{V}_2 = (5, 110^0), \vec{V}_3 = (10, 200^0) \text{ y } \vec{V}_4 = (3, 300^0)$$

1.- Expresar los vectores en coordenadas cartesianas:

$$x_1 = V_1 \cos \theta_1 = 2 \cos 10^0 = 1.9696 \text{ y } y_1 = V_1 \operatorname{sen} \theta_1 = 2 \operatorname{sen} 10^0 = 0.3473$$

$$x_2 = V_2 \cos \theta_2 = 5 \cos 110^0 = -1.7101 \text{ y } y_2 = V_2 \operatorname{sen} \theta_2 = 5 \operatorname{sen} 110^0 = 4.6984$$

$$x_3 = V_3 \cos \theta_3 = 10 \cos 200^0 = -9.3969 \text{ y } y_3 = V_3 \operatorname{sen} \theta_3 = 10 \operatorname{sen} 200^0 = -3.4202$$

$$x_4 = V_4 \cos \theta_4 = 3 \cos 300^0 = 1.5 \text{ y } y_4 = V_4 \operatorname{sen} \theta_4 = 3 \operatorname{sen} 300^0 = -2.598$$

2.- Sumar los vectores.

Después de haber hecho la transformación de coordenadas, el segundo paso consiste en sumar los cuatro vectores de acuerdo a la suma de vectores en coordenadas cartesianas.

$$x_t = \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.96906 - 1.7101 - 9.3969 + 1.5 = -7.6074$$

$$y_t = \sum_{i=1}^n y_i = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0.3473 + 4.6984 - 3.4202 - 2.598 = -0.9725$$

3.- Expresar el vector resultante en coordenadas polares.

El tercer paso consiste en transformar el vector resultante de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. Con ello se expresará el vector resultante en términos de su magnitud y dirección.

$$V_t = \sqrt{x_t^2 + y_t^2} = \sqrt{(-7.6074)^2 + (-0.9725)^2} = \sqrt{58.8183} = 7.67$$

Como el vector resultante se encuentra en el tercer cuadrante por tener ambas coordenadas negativas, es necesario sumar 180° al resultado de la aplicación de la función inversa de la tangente del cociente de la ordenada entre la abscisa del vector resultante, es decir:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-0.9725}{-7.6074}\right) + 180^\circ = 7.2849^\circ + 180^\circ = 187.2849^\circ$$

Ejemplo 2: Presentamos a continuación otro ejemplo para seguir ilustrando la serie de pasos necesarios para la suma de vectores por el método analítico.

$$\vec{V}_1 = (4, 45^\circ), \vec{V}_2 = (2, 160^\circ) \text{ y } \vec{V}_3 = (3, 310^\circ).$$

1.- Expresar los vectores en coordenadas cartesianas:

$$x_1 = V_1 \cos \theta_1 = 4 \cos 45^\circ = 2.8284 \text{ y } y_1 = V_1 \operatorname{sen} \theta_1 = 4 \operatorname{sen} 45^\circ = 2.8284$$

$$x_2 = V_2 \cos \theta_2 = 2 \cos 160^\circ = -1.8794 \text{ y } y_2 = V_2 \operatorname{sen} \theta_2 = 2 \operatorname{sen} 160^\circ = 0.6840$$

$$x_3 = V_3 \cos \theta_3 = 3 \cos 310^\circ = 0.6428 \text{ y } y_3 = V_3 \operatorname{sen} \theta_3 = 3 \operatorname{sen} 310^\circ = -0.7660$$

2.- Sumar los vectores.

Después de haber hecho la transformación de coordenadas, el segundo paso consiste en sumar los cuatro vectores de acuerdo a la suma de vectores en coordenadas cartesianas.

$$x_t = \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + x_3 = 2.8284 - 1.8794 + 0.6428 = 1.5918$$

$$y_t = \sum_{i=1}^n y_i = y_1 + y_2 + y_3 = 2.8284 + 0.6840 - 0.7660 = 2.7464$$

3.- Expresar el vector resultante en coordenadas polares.

El tercer paso consiste en transformar el vector resultante de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. Con ello se expresará el vector resultante en términos de su magnitud y dirección.

$$V_t = \sqrt{x_t^2 + y_t^2} = \sqrt{(1.5918)^2 + (2.7464)^2} = \sqrt{10.0765} = 3.1743$$

Como el vector resultante tiene ambas coordenadas positivas, por lo que se encuentra en el primer cuadrante. En consecuencia, la dirección del vector resultante es igual a:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2.7464}{1.5918}\right) = 59.90^\circ$$

LEY DE LOS COSENOS

La ley de los cosenos nos da la magnitud de la suma de dos vectores en función de su magnitud y del ángulo formado entre ellos. La Ley de los cosenos se podrá deducir a partir de la aplicación de la ecuación de la magnitud de la suma de dos vectores en coordenadas cartesianas.

Sean $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$ y $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$ dos vectores.

La suma está expresada de la siguiente forma:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2, r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2)$$

Aplicando la ecuación que calcula la magnitud de un vector, se obtiene:

$$V^2 = (r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2)^2 + (r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2)^2$$

Desarrollando, se tiene:

$$V^2 = r_1^2 \cos^2 \theta_1 + r_2^2 \cos^2 \theta_2 + 2r_1 r_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + r_1^2 \sin^2 \theta_1 + r_2^2 \sin^2 \theta_2 + 2r_1 r_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

Agrupando términos:

$$V^2 = r_1^2(\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1) + r_2^2(\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2) + 2r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)$$

Como $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ y $\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(\theta_2 - \theta_1)$. Al sustituir estas igualdades, la expresión anterior se simplifica a:

$$V^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Esta expresión corresponde al cuadrado de la magnitud de la suma de dos vectores en función de su magnitud y del ángulo entre ellos. Esta expresión es conocida como Ley de los Cosenos. La relación $(\theta_1 - \theta_2)$ representa el ángulo entre los vectores. Observe la figura 8:

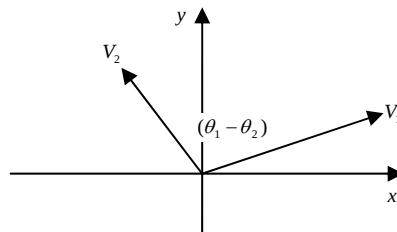


Figura 8

Si el ángulo entre ellos es cero, la magnitud del cuadrado de la suma de los vectores es máxima y si el ángulo entre ellos es de 180° , el cuadrado de la magnitud de la suma es mínima. Para ángulos entre 0° y 180° , el cuadrado de la magnitud adquiere valores intermedios entre el máximo y mínimo. El cuadrado de la magnitud de la suma de dos vectores es cero si forman un ángulo de 180 grados y sus magnitudes son iguales.

El cuadrado de la magnitud de la resta de dos vectores está dado por la siguiente expresión:

$$V^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Observe que las expresiones para la suma y la resta, solo difieren en el signo que está antepuesto a la expresión $2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$. En consecuencia, el cuadrado de la resta de

dos vectores es máxima si el ángulo entre ellos es de 180^0 y mínima si es de 0^0 . Note también que $\text{Cos}(\theta_1 - \theta_2)$ es igual a $\text{Cos}(\theta_2 - \theta_1)$ por lo que el orden de la resta de los ángulos no altera el resultado de la función Coseno.

Si el ángulo entre los vectores es de 90^0 , el cuadrado de la magnitud de la suma de ambos vectores es igual al cuadrado de la resta, ya que $\text{Cos } 90^0 = 0$ por lo que el término $2r_1r_2\text{Cos}(\theta_1 - \theta_2)$ desaparece y se conserva la suma $r_1^2 + r_2^2$ que es igual en ambos casos.

Ejemplo:

Supongamos que se tienen dos vectores dados por: $\vec{V}_1 = (7, 20^0)$ y $\vec{V}_2 = (6, 230^0)$. Encontrar la magnitud de su suma.

$$V^2 = (7)^2 + (6)^2 + 2(7)(6)\text{Cos}(230^0 - 20^0) = 49 + 36 + 84 \text{Cos}(170^0) = 85 - 82.72 = 2.28$$

Extrayendo raíz cuadrada en ambos términos de la ecuación, se obtiene la longitud de la suma de estos vectores.

$$V = 1.51$$

Ejemplo:

Supongamos que ahora se tienen dos vectores dados por: $\vec{V}_1 = (6, 30^0)$ y $\vec{V}_2 = (6, 210^0)$.

Encontrar la magnitud de su suma.

$$V^2 = (6)^2 + (6)^2 + 2(6)(6)\text{Cos}(210^0 - 30^0) = 36 + 36 + (72)\text{Cos}(180^0) = 72 - 72 = 0$$

Extrayendo raíz cuadrada en ambos términos de la ecuación, se obtiene la longitud de la suma de estos vectores.

$$V = 0$$

Por lo tanto:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{0}$$

Es decir, el vector $\vec{V}_1$ es el inverso aditivo del vector $\vec{V}_2$. Por lo que la suma es igual al vector cero.

Ejemplo:

Encontrar el ángulo entre los vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$, si sus magnitudes son $V_1 = 7$ y $V_2 = 6$ cuando el valor de la magnitud de la suma es de $V = 10$.

Aplicando la Ley de los Cosenos, se tiene:

$$V^2 = (10)^2 = (7)^2 + (6)^2 + 2(7)(6)\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Despejando $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ de la ecuación anterior:

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \frac{100 - 49 - 36}{84} = \frac{15}{84} = 0.1786$$

Y aplicando finalmente la función inversa del coseno, obtenemos el ángulo entre los vectores:

$$(\theta_1 - \theta_2) = \cos^{-1}(0.1786) = 79.71^\circ$$

Ejemplo:

Encontrar el ángulo entre los vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$, si sus magnitudes son $V_1 = 7$ y $V_2 = 8$ cuando el valor de la magnitud de la suma es de $V = 10$.

Aplicando la Ley de los Cosenos, se tiene:

$$V^2 = (10)^2 = (7)^2 + (8)^2 + 2(7)(8)\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Despejando $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ de la ecuación anterior:

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \frac{100 - 49 - 64}{112} = \frac{-13}{112} = -0.1161$$

Y aplicando finalmente la función inversa del coseno, obtenemos el ángulo entre los

vectores:

$$(\theta_1 - \theta_2) = \cos^{-1}(-0.1161) = 96.67^\circ$$

Observe que el ángulo entre los dos vectores es mayor a 90° .

Ejemplo:

Encontrar el ángulo entre los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, si sus magnitudes son $v_1 = 7$ y $v_2 = 8$ cuando el valor de la magnitud de la suma es de $v = 20$.

Aplicando la Ley de los Cosenos, se tiene:

$$V^2 = (20)^2 = (7)^2 + (8)^2 + 2(7)(8)\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Despejando $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ de la ecuación anterior, se tiene:

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \frac{400 - 49 - 64}{112} = \frac{287}{112} = 2.5625$$

Y aplicando finalmente la función inversa del coseno, vemos que el ángulo entre los vectores no existe, por lo que concluimos que el dato de la magnitud excede a la máxima magnitud posible entre ambos vectores. La máxima magnitud entre estos vectores es de 15 unidades. De aquí concluimos que $|\cos(\theta_1 - \theta_2)| \leq 1$, es decir, el coseno del ángulo entre ambos vectores debe ser mayor o igual a -1 y menor o igual a 1. No está definida la función coseno para valores fuera de este intervalo.

Ejemplo:

Encontrar el ángulo entre los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, si sus magnitudes son $v_1 = 5$ y $v_2 = 5$ cuando el valor de la magnitud de la suma es de $v = 10$.

Aplicando la Ley de los Cosenos, se tiene:

$$V^2 = (10)^2 = (5)^2 + (5)^2 + 2(5)(5)\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Despejando $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ de la ecuación anterior:

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \frac{100 - 25 - 25}{50} = \frac{50}{50} = 1$$

Y aplicando finalmente la función inversa del coseno, vemos que el ángulo entre los vectores es igual a:

$$(\theta_1 - \theta_2) = \cos^{-1}(1) = 0^\circ$$

Por lo tanto $\theta_1 = \theta_2$.

En consecuencia, ambos ángulos coinciden.

Ejemplo:

Encontrar el ángulo entre los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, si sus magnitudes son $v_1 = 5$ y $v_2 = 5$ cuando el valor de la magnitud de la suma es de $v = 0$.

Aplicando la Ley de los Cosenos, se tiene:

$$V^2 = (0)^2 = (5)^2 + (5)^2 + 2(5)(5)\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Despejando $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ de la ecuación anterior:

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \frac{0 - 25 - 25}{50} = \frac{-50}{50} = -1$$

Y aplicando finalmente la función inversa del coseno, vemos que el ángulo entre los vectores es igual a:

$$(\theta_1 - \theta_2) = \cos^{-1}(-1) = 180^\circ$$

En consecuencia, el ángulo formado entre ambos vectores es de 180° .

Ejemplo:

Cuando el ángulo formado por los dos vectores es de 90° , la magnitud de la suma es igual a la magnitud de la resta de los dos vectores. Para demostrar esta afirmación,

utilicemos la Ley de los Cosenos:

$$V_{Suma}^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Como $\cos(90^\circ) = 0$

En consecuencia, se tiene:

$$V_{Suma}^2 = r_1^2 + r_2^2$$

y

$$V_{Resta}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Como $\cos(90^\circ) = 0$,

En consecuencia se tiene:

$$V_1 + V_2 = r_1^2 + r_2^2$$

Comparando ambas ecuaciones, concluimos que:

$$V_{Suma}^2 = V_{Resta}^2$$

Es decir:

$$V_{Suma} = V_{Resta}$$

En consecuencia, cuando el ángulo entre dos vectores es de 90° , la magnitud de la suma es igual a la magnitud de su resta.

SUMA DE VECTORES: MÉTODO GRÁFICO

Para representar un vector en un diagrama dibujamos una flecha. Escogemos la longitud de la flecha de tal manera que sea proporcional a la magnitud del vector y dirigimos la flecha en la misma dirección del vector, de modo que su punta indique el sentido de éste. Por ejemplo, un desplazamiento de 40 metros al noreste (NE) quedaría

representado en una escala donde 1 cm. equivale a 10 metros, por una flecha de 4 unidades, dibujada a 45° por encima de una línea dirigida hacia el este y cuya flecha se encontrará en el extremo superior derecho. Un vector como éste se representa convenientemente en letras de imprenta por debajo de una flecha, por ejemplo $\vec{A}$. Observe la figura 9

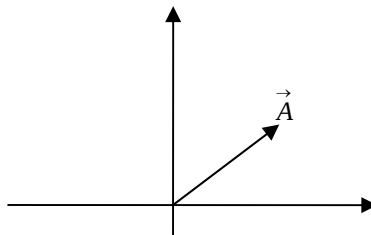


Figura 9

Suponga que un cuerpo se desplaza siguiendo la dirección del vector $\vec{A}$ representado en la figura 10. Después sufre otro movimiento siguiendo la dirección del vector $\vec{B}$. El efecto neto de ambos desplazamientos está representado por el vector $\vec{C}$, el cual es un vector que parte del origen y llega hasta el extremo del último vector. Para hallar la suma de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, dibujamos a partir del extremo del vector $\vec{A}$, un vector igual a $\vec{B}$.

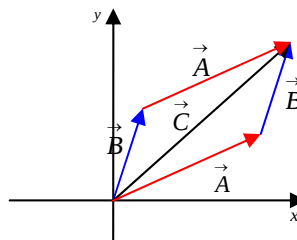


Figura 10

Observe en la figura que es equivalente que el cuerpo se desplace primeramente siguiendo la dirección del vector $\vec{B}$ y después se desplace en la dirección marcada por el vector $\vec{A}$. En ambas situaciones, el cuerpo llega a la misma posición. Puede concluirse a partir de la figura 10 que la suma de vectores es independiente del orden en que se sumen. Es decir:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

Por lo tanto se dice que los vectores son conmutativos con respecto a la adición.

Observe en la figura 10 que la suma gráfica de estos vectores condujo a la construcción de un paralelogramo.

Por otra parte, la suma de tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ puede obtenerse sumando $\vec{C}$ al resultado de $\vec{A} + \vec{B}$.

La figura 11 muestra geoméricamente que la suma de tres o más vectores es independiente del orden de la adición. Por ejemplo:

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = (\vec{A} + \vec{C}) + \vec{B}$$

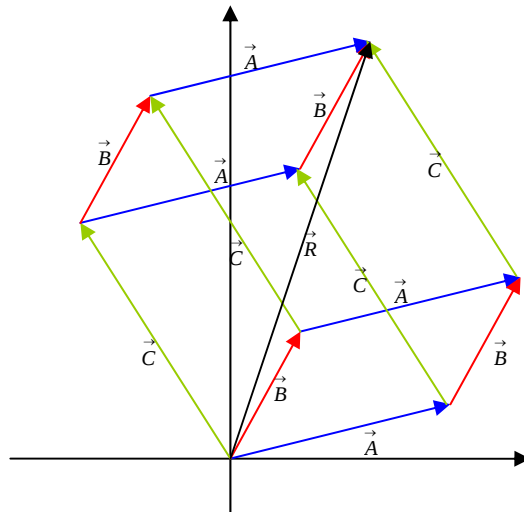


Figura 11

Esta ley se llama ley asociativa de la adición. Existen seis diferentes formas en que se pueden sumar gráficamente tres vectores. Si fuesen 4 vectores, serían 24 formas diferentes en que se pueden sumar. El número de formas en que se pueden sumar los vectores está relacionado con el factorial de un número. El factorial de un número se define como sigue:

$$n! = 1 * 2 * 3 \dots n \text{ para } n \geq 1, \text{ y}$$

$$0! = 1$$

Así, para un conjunto de 5 vectores se tiene que son 120 formas diferentes de sumarlos.

Por otra parte, para restar el vector $\vec{B}$ del vector $\vec{A}$, primero dibujamos los vectores a partir de un origen común. El vector $-\vec{B}$ se define como un vector cuya longitud es idéntica y su sentido es opuesto al original. La resta del vector $\vec{A}$ menos el vector $\vec{B}$ se define como la suma del vector $\vec{A}$ más el vector $-\vec{B}$, es decir:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

La figura 12 muestra estos vectores, con su respectiva operación:

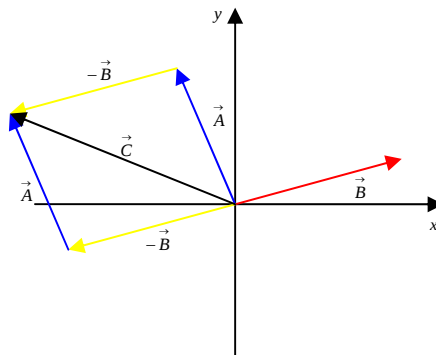


Figura 12

De acuerdo con la definición de sustracción, la longitud de $\vec{A} - \vec{A}$ es cero. Un vector de

longitud cero se dice que es el vector cero.

DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA DE SIMULACIÓN PARA LA SUMA GRÁFICA DE VECTORES.

El programa que muestra la suma gráfica de vectores por el método del paralelogramo y del polígono, es activado con solo hacer doble clic en la aplicación **VECTORES.EXE**.

La figura 13 muestra la distribución de las diversas opciones con las que cuenta el sistema.



Figura 13

La primera opción corresponde a la suma de vectores por el método del paralelogramo; la segunda, a la suma de vectores por el método del polígono y la tercera activa la salida del programa. La figura 14 muestra las opciones para el método del paralelogramo. El usuario podrá introducir, a través de las barras de desplazamiento, los valores de las coordenadas de los dos vectores que desee sumar. Las coordenadas de los vectores están representadas en coordenadas polares, es decir, a través de su longitud y dirección. Conforme se introduzcan los valores de las coordenadas, el sistema desplegará cada uno de los vectores que intervienen en la suma. El sistema desplegará la suma gráfica por el método del paralelogramo de los dos vectores haciendo clic en el botón **Graficar Paralelogramo**. También se desplegará el valor de

la longitud y de la dirección del vector resultante.

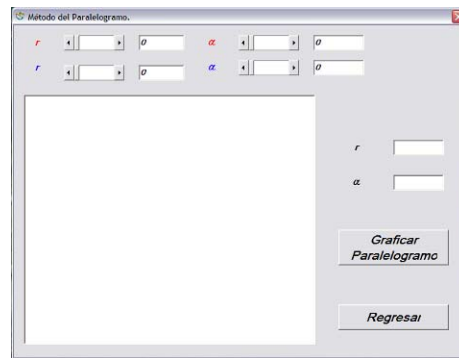


Figura 14

La figura 15 muestra, a manera de ejemplo, los valores de las coordenadas polares de los vectores $(25, 165^\circ)$ y $(40, 25^\circ)$.

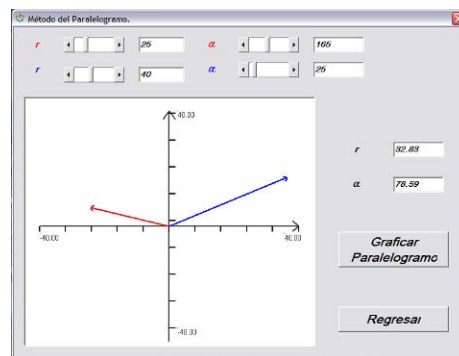


Figura 15

El sistema dibuja la suma de los dos vectores por el método del paralelogramo haciendo clic en el botón de comando **Graficar Paralelogramo**. Los valores de la suma son mostrados en las cajas de texto correspondientes, dando como resultado el vector $(26.32, 62.62^\circ)$. Observe la figura 16.

Los rangos de las longitudes de los vectores van desde 0 hasta 100 unidades y de los ángulos desde 0 hasta 360 grados. El usuario podrá ensayar con cualquier par de vectores dentro de este par de rangos. El sistema está diseñado para calcular automáticamente el máximo valor de las longitudes de los vectores o de la resultante,

de tal manera que se ajusten estos valores a la ventana de la simulación.

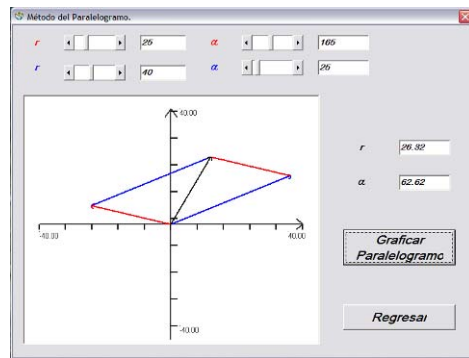


Figura 16

Si se introducen los valores de los vectores: $(30, 40^\circ)$ y $(30, 220^\circ)$, se observará que la suma es igual al vector cero, debido a que ambos vectores tienen direcciones opuestas. La figura 17 muestra un diagrama de ambos vectores con su respectiva resultante. Este caso es como si se restaran dos vectores de la misma magnitud e igual dirección. Es como si se restaran los vectores $(30, 40^\circ)$ y $(30, 40^\circ)$. Rotar un vector 180° es invertir su sentido. El sistema no ha podido dibujar el paralelogramo, debido a que ambos vectores son paralelos.

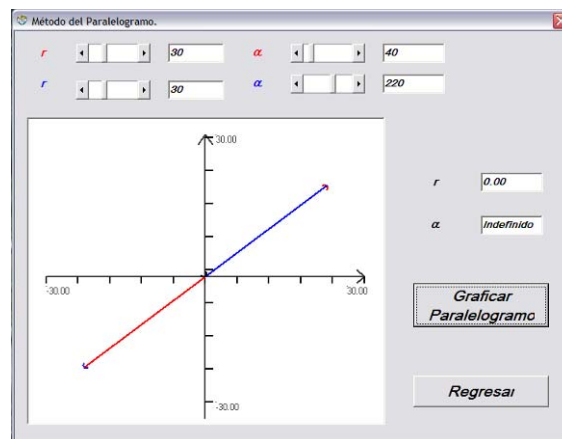


Figura 17

Por otra parte, la figura 18 muestra las opciones para el método del polígono. Esta ventana presenta seis barras de desplazamiento; tres para introducir las longitudes de

los vectores y las otras tres para introducir su dirección.

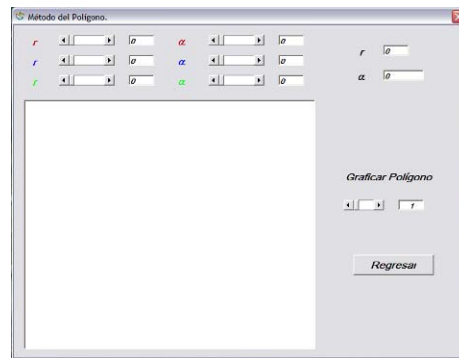


Figura 18

Conforme se introduzcan los valores de las coordenadas, el sistema desplegará cada uno de los vectores que intervengan en la suma. El sistema desplegará la suma gráfica por el método del polígono a través de una barra de desplazamiento. La barra de desplazamiento tiene un rango de 1 a 7 valores que corresponden con las diversas órdenes en que se pueden sumar los tres vectores. El último valor corresponde a todas las sumas simultáneamente, la cual dibujará un paralelepípedo formado por las diferentes formas en que se pueden sumar tres vectores. Al cambiar el valor de la barra de desplazamiento, se mostrará una suma particular. La figura 19 muestra, a manera de ejemplo, los valores de las longitudes y direcciones de tres vectores particulares. Los valores de las coordenadas de los vectores son: $(5, 30^0)$, $(10, 60^0)$ y $(15, 150^0)$. Observe en la figura una de las seis formas en que se pueden sumar los vectores por el método del polígono. Observe también que el sistema despliega la longitud y dirección de la resultante de la suma de estos vectores, dando como resultado, para este caso, el vector $(19.02, 101.10^0)$. Estos valores no dependen del orden en que se sumen los vectores.

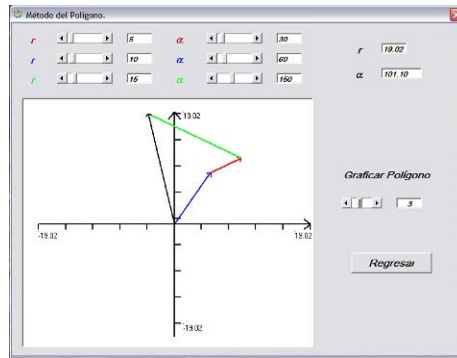


Figura 19

La figura 20 muestra otro orden en el que se pueden sumar los vectores. El usuario podrá observar las diferentes formas en que se pueden sumar los vectores con solo modificar los valores de la barra de desplazamiento.

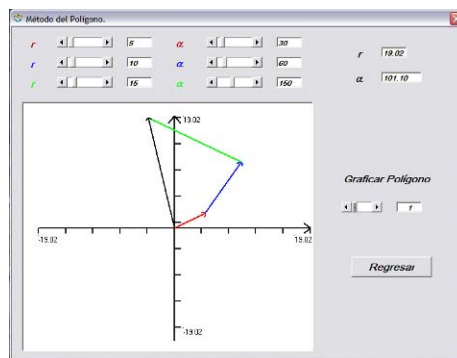


Figura 20

La figura 21 muestra simultáneamente todas las formas de sumar los tres vectores. Observe que los vectores aparentan formar un paralelepípedo de seis lados.

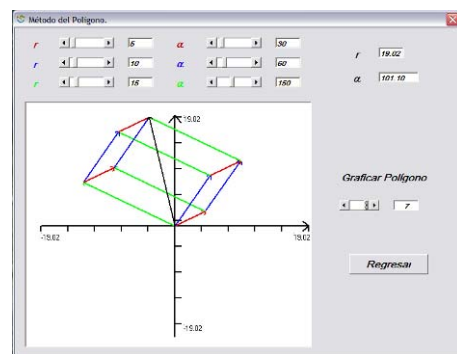


Figura 21

El usuario podrá ensayar con cualquier trío de vectores dentro de este par de rangos. El sistema está diseñado para calcular automáticamente el máximo valor de las longitudes de los vectores o de la resultante, de tal manera que se ajusten estos valores a la ventana de imagen. Por ejemplo, introduzcamos los vectores siguientes: $(50, 0^\circ)$, $(50, 120^\circ)$ y $(50, 240^\circ)$. La figura 22 muestra la gráfica de los tres vectores.

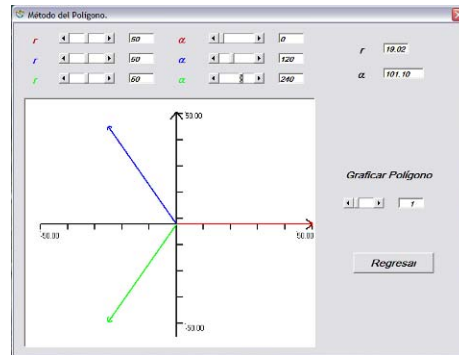


Figura 22

Al activar la barra de desplazamiento se obtienen las diferentes formas de sumar los tres vectores. Observe la figura 23.

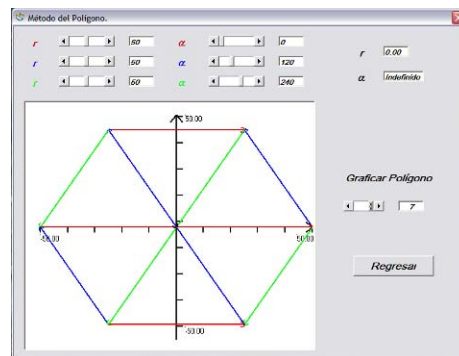


Figura 23

Observe que el vector resultante es igual al vector nulo, es decir, las coordenadas del vector son cero. En este caso su dirección no está definida.

Conclusiones

El sistema:

1. Presenta una interface gráfica de fácil manejo, ya que permite al usuario introducir los valores de cada parámetro a través de barras de desplazamiento.
2. Identifica la función de cada una de las variables involucradas en la simulación.
3. Ayuda a caracterizar la suma gráfica de vectores por el Método del Paralelogramo y del Polígono.
4. Propicia a que el usuario pueda construir sus propias conceptualizaciones.
5. Genera modelos visuales, ya que se muestran representaciones de los conceptos de la suma de vectores por el método gráfico.
6. Apoya la labor docente.

Bibliografía

1. Beltrán, V; Braun, Eliezer. Principios de Física. Trillas. México, 1970.
2. Cevallos, Fco. Javier. Enciclopedia de Visual Basic. Alfa Omega Grupo Editor. México. 1997.
3. Haaser, Norman B; LaSalle, Joseph P; Sullivan, Joseph A. Análisis Matemático, Curso de Introducción. Trillas. México, 1977.
4. Resnick, Robert; Halliday, David. Física. Vol II. CECSA. México, 1980.
5. Sears, Francis W; Zemansky, Mark; Young, Hugh D. Física Universitaria. Addison-Wesley Iberoamericana. 1988.
6. Wooton, William; Beckenbach, Edwin F; Fleming, Frank J. Geometría Analítica Moderna. Publicaciones Cultural S.A. México. 1978.