



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA CHAPINGO

DPTO. DE PREPARATORIA AGRÍCOLA

ÁREA DE FÍSICA

***“MECÁNICA PARA ESTUDIANTES DE
BACHILLERATO”***

Guillermo Becerra Córdova

ISBN: 978-607-00-8512-3



ISBN: 978-607-00-8512-3

PRÓLOGO

El propósito general del libro es presentar al alumno un panorama de la Mecánica Clásica, haciendo especial énfasis en los principios fundamentales de la conservación de la masa, del momento lineal y de la energía. Este texto ha sido elaborado como consecuencia de la experiencia que se tiene en la impartición del curso de la materia de Física I (Mecánica), contenida en el plan de estudios del Dpto. de Preparatoria Agrícola de la Universidad Autónoma Chapingo.

Se ha tenido la idea de elaborar unos apuntes que expliquen lo más claro posible los conceptos que se tratan en cada uno de los capítulos que se incluyen en el texto. Para ello se hacen uso de gráficas que hagan posible que el alumno visualice los conceptos que se tratan. De igual forma se presenta una amplia gama de problemas resueltos para que el alumno pueda comprender de la forma fácil cada uno de los temas que aborda la obra.

ÍNDICE

1	Vectores	
1.1	Introducción	3
1.2	Vectores en un plano	3
1.3	Propiedades de la multiplicación de un vector por un escalar	8
1.4	Propiedad distributiva con respecto a la suma de escalares	10
1.5	Dirección de un vector	11
1.6	Suma de vectores: método analítico	14
1.7	Ley de los cosenos	15
1.8	Suma de vectores: método gráfico	18
1.9	Preguntas y problemas	21
2	Cinemática	
2.1	Concepto de Cinemática	23
2.2	Concepto de movimiento	23
2.3	Movimiento Rectilíneo Uniforme	23
2.4	Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado	36
2.5	Tiro vertical y caída libre	47
2.6	Tiro Parabólico	52
2.7	Preguntas y problemas	64
3	Dinámica	
3.1	Concepto de Dinámica	69
3.2	Inercia	69
3.3	Primera Ley de Newton	69
3.4	Aplicaciones de la Primera Ley de Newton	70
3.5	Segunda Ley de Newton	73
3.6	Aplicaciones de la Segunda Ley de Newton	73
3.6.1	Máquina de Atwood	74
3.6.2	Plano Horizontal	77
3.6.3	Plano Inclinado	83
3.7	Preguntas y problemas	98
4	Trabajo y Energía	
4.1	Concepto de Trabajo y Energía	105
4.2	Preguntas y problemas	129
5	Cantidad de Movimiento	
5.1	Concepto de Cantidad de Movimiento	137
5.2	Impulso	137
5.3	Conservación de la Cantidad de Movimiento	139
5.4	Colisiones Elásticas	140
5.5	Colisiones Inelásticas	140
5.6	Coeficiente de Restitución	143
5.7	¿Cuánto tarda una pelota en dejar de botar?	153
5.8	Colisiones en dos dimensiones	155
5.9	Preguntas y problemas	160
6	Bibliografía	165

1 VECTORES

1.1 Introducción

Muchas cantidades físicas como la masa, el volumen y el tiempo, pueden especificarse completamente por medio de su magnitud. Son cantidades que no necesitan una dirección. Se trata de cantidades escalares. Estas cantidades satisfacen los axiomas de los números reales. Por ejemplo, si añadimos 3 kg de arena a 1 kg de cemento, la mezcla resultante tendrá una masa de 4 kg. Si sacamos 5 litros de agua de un cubo que inicialmente tenía 8 litros, el volumen resultante será de 3 litros. Si durante un viaje que debe durar una hora, nos retrasamos 15 minutos, la travesía durará $1\frac{1}{4}$ horas. En ninguno de estos casos interviene la dirección. Vemos que no tiene sentido hablar de 10 kg hacia el norte, 5 litros hacia el este o 15 minutos hacia el sur. Las cantidades que sólo tienen magnitud, pero no dirección, se llaman cantidades escalares.

Para describir completamente algunas cantidades se requiere tanto una magnitud como una dirección. A estas cantidades se les denomina cantidades o magnitudes vectoriales. La palabra vector significa en latín transportador, que sugiere la idea de desplazamiento. Por ejemplo, la velocidad y la fuerza tienen dirección y magnitud y de alguna forma están relacionadas con desplazamientos. Otras cantidades físicas que son vectores: la aceleración, el campo eléctrico y el campo magnético. Muchas leyes de la física pueden expresarse en forma compacta usando vectores; con esta notación, se puede simplificar muchos de los cálculos que conducen a dichas leyes.

1.2 Vectores en un plano

Un vector en el plano cartesiano puede ser representado por un par de números o coordenadas encerrados por un paréntesis y separados por una coma. La primera coordenada representa el desplazamiento en la dirección horizontal y la segunda representa un desplazamiento en la dirección vertical. Si el desplazamiento horizontal es positivo, se dice que el desplazamiento es hacia la derecha y si el desplazamiento es negativo, se dirigirá hacia la izquierda. Equivalentemente, si el desplazamiento en la dirección vertical es positivo se dice que va hacia arriba y negativo en caso contrario. De esta forma el vector $\vec{A} = (3, 4)$ representa el desplazamiento de un objeto 3 unidades a la derecha y 4 unidades hacia arriba. Una flecha asociada con el vector $\vec{A} = (3, 4)$ que tiene su punto inicial en el origen se llama representación ordinaria. Observe la figura 1.1.

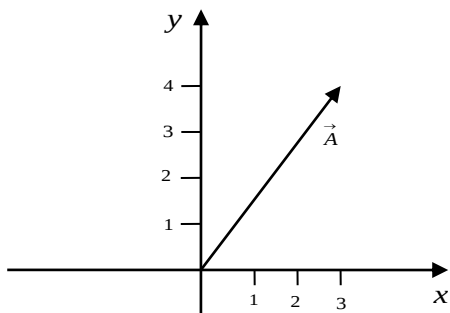


Figura 1.1

Como cualquier vector $\vec{A} = (x, y)$ se puede visualizar como la representación de una traslación de x unidades en dirección horizontal seguida de una traslación de y unidades en dirección vertical o viceversa, sugiere que al vector se le considere como la suma de dos vectores $(x, 0)$ y $(0, y)$. En general, una traslación representada por el vector $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$ seguida de otra traslación representada por el vector $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$, produce como resultado una traslación total dada por $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Esto nos permite definir la adición de dos vectores de la siguiente manera:

Definición 1.1

Si $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$ y $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Ejemplo 1.1

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (3, 4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (2, 7) + (3, 4) = (2 + 3, 7 + 4) = (5, 11)$$

Si $\vec{V}_1 = (5, -1)$ y $\vec{V}_2 = (-3, 4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (5, -1) + (-3, 4) = (5 - 3, -1 + 4) = (2, 3).$$

Esta suma se puede generalizar para más de dos vectores.

Si $\vec{V}_1 = (1, 4), \vec{V}_2 = (-2, 6), \vec{V}_3 = (7, -5)$ y $\vec{V}_4 = (9, 8)$ son cuatro vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4 = (1, 4) + (-2, 6) + (7, -5) + (9, 8) = (1 - 2 + 7 + 9, 4 + 6 - 5 + 8) = (16, 13).$$

Definición 1.2

Llamamos al vector cero a aquel vector cuyos elementos son cero, es decir: $\vec{0} = (0, 0)$.

Definición 1.3

Si $\vec{V} = (x, y)$ es un vector, entonces $-\vec{V} = -(x, y) = (-x, -y)$ es otro vector. Ambos vectores tienen la misma longitud, pero su dirección es contraria. Observe la figura 1.2.

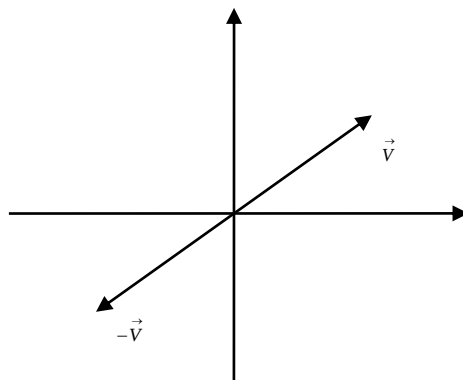


Figura 1.2

Ejemplo 1.2

Si $\vec{V} = (2, 7)$, entonces $-\vec{V} = -(2, 7) = (-2, -7)$.

Si $\vec{V} = (-2, 7)$, entonces $-\vec{V} = -(-2, 7) = (-(-2), -7) = (2, -7)$.

Si $\vec{V} = (-2, -7)$, entonces $-\vec{V} = -(-2, -7) = (-(-2), -(-7)) = (2, 7)$.

Si $\vec{V} = (2, -7)$, entonces $-\vec{V} = -(2, -7) = (-2, -(-7)) = (-2, 7)$.

La anterior definición nos conduce a la siguiente definición.

Definición 1.4

Si $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$ y $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{V}_1 + (-\vec{V}_2) = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1, y_1) + (-x_2, -y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

La cual corresponde a la resta de dos vectores. La resta se define como la suma del inverso aditivo de un vector.

Ejemplo 1.3

Si: $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (3, 4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = (2, 7) - (3, 4) = (2, 7) + (-3, -4) = (2 - 3, 7 - 4) = (-1, 3)$$

Si: $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (-3, 4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = (2, 7) - (-3, 4) = (2, 7) + (3, -4) = (2 + 3, 7 - 4) = (5, 3)$$

Si: $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (-3, -4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = (2, 7) - (-3, -4) = (2, 7) + (3, 4) = (2 + 3, 7 + 4) = (5, 11)$$

Si: $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (3, -4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = (2, 7) - (3, -4) = (2, 7) + (-3, 4) = (2 - 3, 7 + 4) = (-1, 11)$$

En base a estas definiciones presentamos las siguientes propiedades de la suma de vectores:

Propiedad Conmutativa:

Si $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$ y $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$$

Esta propiedad nos indica que se obtiene la misma resultante si al vector $\vec{V}_1$ le sumamos el vector $\vec{V}_2$ o al vector $\vec{V}_2$ le sumamos el vector $\vec{V}_1$.

Ejemplo 1.4

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (3, 4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (2, 7) + (3, 4) = (2 + 3, 7 + 4) = (3 + 2, 4 + 7) = (3, 4) + (2, 7) = \vec{V}_2 + \vec{V}_1.$$

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (-3, 4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (2, 7) + (-3, 4) = (2 - 3, 7 + 4) = (-3 + 2, 4 + 7) = (-3, 4) + (2, 7) = \vec{V}_2 + \vec{V}_1.$$

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (-3, -4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (2, 7) + (-3, -4) = (2 - 3, 7 - 4) = (-3 + 2, -4 + 7) = (-3, -4) + (2, 7) = \vec{V}_2 + \vec{V}_1.$$

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (3, -4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (2, 7) + (3, -4) = (2 + 3, 7 - 4) = (3 + 2, -4 + 7) = (3, -4) + (2, 7) = \vec{V}_2 + \vec{V}_1.$$

Propiedad de Cerradura:

Si $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$ y $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$ son dos vectores, entonces: $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ también es un vector. Es decir, el vector resultante también tiene dos coordenadas.

Ejemplo 1.5

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (3, 4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (2, 7) + (3, 4) = (2 + 3, 7 + 4) = (5, 11), \text{ también es un vector.}$$

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (-3, 4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (2, 7) + (-3, 4) = (2 - 3, 7 + 4) = (-1, 11), \text{ también es un vector.}$$

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (-3, -4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (2, 7) + (-3, -4) = (2 - 3, 7 - 4) = (-1, 3), \text{ también es un vector.}$$

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (3, -4)$ son dos vectores, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (2, 7) + (3, -4) = (2 + 3, 7 - 4) = (5, 3), \text{ también es un vector.}$$

Propiedad Asociativa:

Si $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$, $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$ y $\vec{V}_3 = (x_3, y_3)$ son tres vectores, entonces:

$$(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3 = \vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3)$$

Esta propiedad nos dice que al sumar tres vectores, primero sumamos dos de ellos y al resultado se le suma el vector restante.

Ejemplo 1.6

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$, $\vec{V}_2 = (3, -4)$ y $\vec{V}_3 = (5, -2)$ son tres vectores, entonces:

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 &= (2, 7) + (3, -4) + (5, -2) = (2 + 3, 7 - 4) + (5, -2) = (5, 3) + (5, -2) \\ &= (2, 7) + (3 + 5, -4 - 2) = (2, 7) + (8, -6) = (10, 1)\end{aligned}$$

Si $\vec{V}_1 = (2, -7)$, $\vec{V}_2 = (3, 4)$ y $\vec{V}_3 = (5, -2)$ son tres vectores, entonces:

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 &= (2, -7) + (3, 4) + (5, -2) = (2 + 3, -7 + 4) + (5, -2) = (5, -3) + (5, -2) \\ &= (2, -7) + (3 + 5, 4 - 2) = (2, -7) + (8, 2) = (10, -5)\end{aligned}$$

Si $\vec{V}_1 = (2, -7)$, $\vec{V}_2 = (3, 4)$ y $\vec{V}_3 = (5, 2)$ son tres vectores, entonces:

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 &= (2, -7) + (3, 4) + (5, 2) = (2 + 3, -7 + 4) + (5, 2) = (5, -3) + (5, 2) \\ &= (2, -7) + (3 + 5, 4 + 2) = (2, -7) + (8, 6) = (10, -1)\end{aligned}$$

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$, $\vec{V}_2 = (3, 4)$ y $\vec{V}_3 = (5, 2)$ son tres vectores, entonces:

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 &= (2, 7) + (3, 4) + (5, 2) = (2 + 3, 7 + 4) + (5, 2) = (5, 11) + (5, 2) \\ &= (2, 7) + (3 + 5, 4 + 2) = (2, 7) + (8, 6) = (10, 13)\end{aligned}$$

Propiedad Neutro Aditivo:

Si $\vec{V} = (x, y)$ es un vector, entonces:

$$\vec{V} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{V} = \vec{V}$$

Todo vector sumado al vector neutro aditivo es igual al mismo vector.

Ejemplo 1.7

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$ es un vector, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{0} = (2, 7) + (0, 0) = (2 + 0, 7 + 0) = (0 + 2, 0 + 7) = (2, 7).$$

Si: $\vec{V}_1 = (-2, 7)$ es un vector, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{0} = (-2, 7) + (0, 0) = (-2 + 0, 7 + 0) = (0 - 2, 0 + 7) = (-2, 7).$$

Si $\vec{V}_1 = (-2, -7)$ es un vector, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{0} = (-2, -7) + (0, 0) = (-2 + 0, -7 + 0) = (0 - 2, 0 - 7) = (-2, -7)$$

Si $\vec{V}_1 = (2, -7)$ es un vector, entonces:

$$\vec{V}_1 + \vec{0} = (2, -7) + (0, 0) = (2 + 0, -7 + 0) = (0 + 2, 0 - 7) = (2, -7).$$

Propiedad Inverso Aditivo:

$$\vec{V} + (-\vec{V}) = \vec{0}$$

A todo vector sumado su inverso aditivo es igual al neutro aditivo.

Ejemplo 1.8

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$ es un vector, entonces:

$$\vec{V}_1 + (-\vec{V}_1) = (2, 7) + (-2, -7) = (2 - 2, 7 - 7) = (0, 0).$$

Si $\vec{V}_1 = (-2, 7)$ es un vector, entonces:

$$\vec{V}_1 + (-\vec{V}_1) = (-2, 7) + (2, -7) = (-2 + 2, 7 - 7) = (0, 0).$$

Si $\vec{V}_1 = (-2, -7)$ es un vector, entonces:

$$\vec{V}_1 + (-\vec{V}_1) = (-2, -7) + (2, 7) = (-2 + 2, -7 + 7) = (0, 0).$$

Si $\vec{V}_1 = (2, -7)$ es un vector, entonces:

$$\vec{V}_1 + (-\vec{V}_1) = (2, -7) + (-2, 7) = (2 - 2, -7 + 7) = (0, 0).$$

Note que las propiedades de adición de los vectores son idénticas a las propiedades de adición de los números reales.

Multiplicación de un escalar por un vector:

Supongamos que se tiene el vector $\vec{V} = (x, y)$ y efectuamos la suma dada por:

$$\vec{V} + \vec{V} + \vec{V} = (x, y) + (x, y) + (x, y) = (x + x + x, y + y + y) = (3x, 3y)$$

Por otra parte:

$$\vec{V} + \vec{V} + \vec{V} = 3\vec{V}$$

Dos cosas iguales a un tercero son iguales entre sí. Por lo tanto:

$$3\vec{V} = (3x, 3y)$$

Al sumar tres veces el mismo vector, el resultado es equivalente a multiplicar por tres ese vector. En consecuencia, se establece la siguiente definición:

Si $\vec{V} = (x, y)$ es un vector y si r es un escalar, entonces se define la multiplicación de un vector por un escalar como:

$$r\vec{V} = r(x, y) = (rx, ry)$$

El vector resultante de la multiplicación de un escalar tiene la misma dirección pero su sentido dependerá del valor que tenga el escalar. Si el escalar es positivo, ambos vectores tendrán el mismo sentido. Si el escalar es negativo, el sentido de ambos vectores serán diferentes y si el escalar es igual a cero, el vector resultante es igual a cero.

Ejemplo 1.9

Si $\vec{V} = (3, 5)$ es un vector, entonces:

$$4\vec{V} = 4(3, 5) = (4 * 3, 4 * 5) = (12, 20)$$

Si $\vec{V} = (-3, 5)$ es un vector, entonces:

$$4\vec{V} = 4(-3, 5) = (4 * (-3), 4 * 5) = (-12, 20)$$

Si $\vec{V} = (-3, -5)$ es un vector, entonces:

$$4\vec{V} = 4(-3, -5) = (4 * (-3), 4 * (-5)) = (-12, -20)$$

Si $\vec{V} = (3, -5)$ es un vector, entonces:

$$4\vec{V} = 4(3, -5) = (4 * 3, 4 * (-5)) = (12, -20)$$

1.3 Propiedades de la multiplicación de un vector por un escalar

Propiedad de Cerradura:

Si $\vec{V} = (x, y)$ es un vector y r es un escalar, entonces $r\vec{V}$ es un vector.

Propiedad Asociativa:

Si $\vec{V} = (x, y)$ es un vector, r y s son escalares, entonces $rs\vec{V}$ es un vector.

Ejemplo 1.10

Si: $\vec{V} = (3, 5)$ es un vector, entonces:

$$(2 * 4)\vec{V} = 2 * (4 * (3, 5)) = 2 * (4 * 3, 4 * 5) = 2 * (12, 20) = (24, 40)$$

Si: $\vec{V} = (-2, 5)$ es un vector, entonces:

$$(2 * 4)\vec{V} = 2 * (4 * (-2, 5)) = 2 * (4 * (-2), 4 * 5) = 2 * (-8, 20) = (-16, 40)$$

Si: $\vec{V} = (4, -5)$ es un vector, entonces:

$$((-2) * 4)\vec{V} = (-2) * (4 * (4, -5)) = (-2) * (4 * 4, 4 * (-5)) = (-2) * (16, -20) = (-32, 40)$$

Si: $\vec{V} = (-3, -3)$ es un vector, entonces:

$$(2 * 4)\vec{V} = 2 * (4 * (-3, -3)) = 2 * (4 * (-3), 4 * (-3)) = 2 * (-12, -12) = (-24, -24)$$

Todo vector no se altera al multiplicarlo por la unidad.

$$1 \vec{V} = \vec{V}$$

Ejemplo 1.11

Si $\vec{V} = (3,5)$ es un vector, entonces:

$$1 \vec{V} = 1 (3, 5) = (1 * 3, 1 * 5) = (3, 5)$$

Si: $\vec{V} = (-3,5)$ es un vector, entonces:

$$1 \vec{V} = 1 (-3, 5) = (1 * (-3), 1 * 5) = (-3, 5)$$

Si $\vec{V} = (-3,-5)$ es un vector, entonces:

$$1 \vec{V} = 1 (-3, -5) = (1 * (-3), 1 * (-5)) = (-3, -5)$$

Si $\vec{V} = (3,-5)$ es un vector, entonces:

$$1 \vec{V} = 1 (3, -5) = (1 * 3, 1 * (-5)) = (3, -5)$$

Si el producto de un escalar por un vector es igual al vector cero, el vector o el escalar deben ser igual a cero.

$$r \vec{V} = \vec{0} = (0, 0)$$

Ejemplo 1.12

Si: $\vec{V} = (3,5)$ es un vector, entonces:

$$0 \vec{V} = 0 (3, 5) = (0 * 3, 0 * 5) = (0, 0)$$

Si $\vec{V} = (-3,5)$ es un vector, entonces:

$$0 \vec{V} = 0 (-3, 5) = (0 * (-3), 0 * 5) = (0, 0)$$

Si $\vec{V} = (-3,-5)$ es un vector, entonces:

$$0 \vec{V} = 0 (-3, -5) = (0 * (-3), 0 * (-5)) = (0, 0)$$

Si $\vec{V} = (3,-5)$ es un vector, entonces:

$$0 \vec{V} = 0 (3, -5) = (0 * 3, 0 * (-5)) = (0, 0)$$

Propiedad del Inverso Aditivo:

$$-1 \vec{V} = -\vec{V}$$

Al multiplicar un vector por el escalar -1 el resultado es el inverso aditivo del vector original.

Ejemplo 1.13

Si $\vec{V} = (3,5)$ es un vector, entonces:

$$-1 \vec{V} = -1 (3, 5) = ((-1) * 3, (-1) * 5) = (-3, -5)$$

Si $\vec{V} = (-3,5)$ es un vector, entonces:

$$-1 \vec{V} = -1 (-3, 5) = ((-1) * (-3), (-1) * 5) = (3, -5)$$

Si $\vec{V} = (-3,-5)$ es un vector, entonces:

$$-1 \vec{V} = (-1) (-3, -5) = ((-1) * (-3), (-1) * (-5)) = (3, 5)$$

Si $\vec{V} = (3,-5)$ es un vector, entonces:

$$(-1) \vec{V} = (-1) (3, -5) = ((-1) * 3, (-1) * (-5)) = (-3, 5)$$

Propiedad Distributiva con Respecto a la Suma de Vectores.

$$r (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = r \vec{V}_1 + r \vec{V}_2$$

El producto de un escalar por la suma de dos vectores es igual a la suma de los productos del escalar por los vectores.

Ejemplo 1.14

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (-3, -4)$ son dos vectores, entonces:

$$5(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = 5\vec{V}_1 + 5\vec{V}_2 = 5 * (2, 7) + 5 * (-3, -4) = (5 * 2, 5 * 7) + (5 * (-3), 5 * (-4)) \\ = (10, 35) + (-15, -20) = (-5, 15)$$

Si $\vec{V}_1 = (2, 7)$ y $\vec{V}_2 = (3, 4)$ son dos vectores, entonces:

$$5(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = 5\vec{V}_1 + 5\vec{V}_2 = 5 * (2, 7) + 5 * (3, 4) = (5 * 2, 5 * 7) + (5 * 3, 5 * 4) = (10, 35) + (15, 20) \\ = (25, 55)$$

Si $\vec{V}_1 = (-2, -7)$ y $\vec{V}_2 = (3, 4)$ son dos vectores, entonces:

$$5(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = 5\vec{V}_1 + 5\vec{V}_2 = 5 * (-2, -7) + 5 * (3, 4) = (5 * (-2), 5 * (-7)) + (5 * 3, 5 * 4) \\ = (-10, -35) + (15, 20) = (5, -15)$$

Si $\vec{V}_1 = (-2, -7)$ y $\vec{V}_2 = (-3, -4)$ son dos vectores, entonces:

$$5(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = 5\vec{V}_1 + 5\vec{V}_2 = 5 * (-2, -7) + 5 * (-3, -4) = (5 * (-2), 5 * (-7)) + (5 * (-3), 5 * (-4)) \\ = (-10, -35) + (-15, -20) = (-25, -55)$$

1.4 Propiedad Distributiva con respecto a la Suma de escalares

$$(r + s) \vec{V} = r \vec{V} + s \vec{V}$$

El producto de la suma de dos escalares por un vector es igual a la suma de los productos de los escalares por el vector.

Ejemplo 1.15

Si: $\vec{V} = (3, 5)$ es un vector, entonces:

$$(2 + 4) \vec{V} = 2 * (3, 5) + 4 * (3, 5) = (2 * 3, 2 * 5) + (4 * 3, 4 * 5) = (6, 10) + (12, 20) \\ = (6 + 12, 10 + 20) = (18, 30)$$

Si $\vec{V} = (-3, 2)$ es un vector, entonces:

$$(2 + 4) \vec{V} = 2 * (3, -2) + 4 * (3, -2) = (2 * 3, 2 * (-2)) + (4 * 3, 4 * (-2)) = (6, -4) + (12, -8) \\ = (6 + 12, -4 - 8) = (18, -12)$$

Si $\vec{V} = (-3, -2)$ es un vector, entonces:

$$(2 + 4) \vec{V} = 2 * (-3, -2) + 4 * (-3, -2) = (2 * (-3), 2 * (-2)) + (4 * (-3), 4 * (-2)) = (-6, -4) + (-12, -8) \\ = (-6 - 12, -4 - 8) = (-18, -12)$$

Si $\vec{V} = (3, -2)$ es un vector, entonces:

$$(-2 + 4) \vec{V} = (-2) * (3, -2) + 4 * (3, -2) = ((-2) * 3, (-2) * (-2)) + (4 * 3, 4 * (-2)) = (-6, 4) + (12, -8) \\ = (-6 + 12, 4 - 8) = (6, -4)$$

1.5 Magnitud de un vector

$$V = \sqrt{x^2 + y^2}$$

La magnitud de cualquier vector no es negativa, por lo tanto siempre se debe tomar el signo positivo de la raíz cuadrada.

Para cada vector existe una única magnitud. No existen dos magnitudes diferentes de un mismo vector.

Ejemplo 1.16

Si $\vec{V} = (3, 4)$ es un vector, entonces su magnitud está dada por:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Si $\vec{V} = (-3, 4)$ es un vector, entonces su magnitud está dada por:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Si $\vec{V} = (-3, -4)$ es un vector, entonces su magnitud está dada por:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Si $\vec{V} = (3, -4)$ es un vector, entonces su magnitud está dada por:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Observe que todos estos vectores tienen la misma magnitud, independientemente de su dirección.

Si $\vec{V} = (3.5355, 3.5355)$ es un vector, entonces su magnitud está dada por:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3.5355)^2 + (3.5355)^2} = \sqrt{12.5 + 12.5} = \sqrt{25} = 5$$

Estos resultados nos indican que existe una infinidad de vectores con la misma magnitud.

No es lo mismo que un vector tenga muchas magnitudes a que varios vectores tengan la misma magnitud. El primer caso no puede ser posible.

Si $V = 0$ entonces $\vec{V} = \vec{0} = (0, 0)$ y si $\vec{V} = \vec{0} = (0, \vec{0})$ entonces $V = 0$.

Si $\vec{V} = (x, y)$ es un vector y $\vec{V} \neq \vec{0}$, la dirección del vector $\vec{V}$ es el ángulo θ para el cual:

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ o } \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

El ángulo θ es el ángulo formado por el eje horizontal positivo y el vector. El ángulo es positivo si se mide en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y negativo se mide en sentido contrario.

1.5 Dirección de un vector

Si el vector se dibuja en un plano cartesiano, la dirección y sentido de ese vector están determinados completamente por el ángulo que forma la parte positiva del eje de las abscisas y el vector.

En términos de la tangente se tiene que la dirección θ del vector se puede calcular de la siguiente manera:

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

Se puede visualizar la dirección de un vector haciendo un diagrama de un vector que se encuentre trazado en un plano cartesiano. Observe la figura 1.3.

La magnitud del vector $\vec{V}$ es $V = \sqrt{x^2 + y^2}$ y su dirección $\tan \theta = \frac{y}{x}$ ó $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$.

Podemos establecer que un vector lo podemos caracterizar por dos formas.

1.- Por un par de coordenadas (x, y) llamadas coordenadas cartesianas: la primera coordenada lleva el nombre de abscisa y representa el desplazamiento horizontal, y la segunda se conoce como ordenada y representa el desplazamiento vertical.

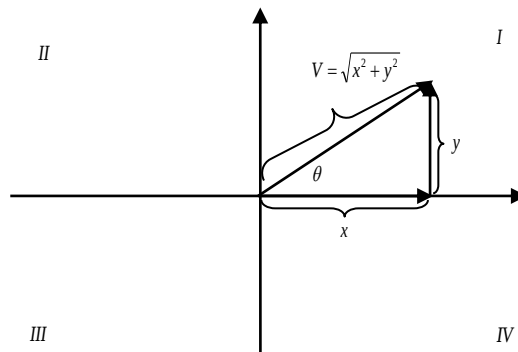


Figura 1.3

2.- Por un par de coordenadas (r, θ) llamadas coordenadas polares. La primera coordenada es la magnitud del vector y la segunda representa su dirección.

Como ambos sistemas de coordenadas describen completamente a un vector, estos sistemas son equivalentes. En consecuencia, a partir de un sistema de coordenadas podemos obtener el otro sistema y viceversa.

Supongamos que se tiene un vector representado por medio de coordenadas polares y queremos representarlo por medio de coordenadas cartesianas, las fórmulas de transformación son:

$$x = V \cos \theta \text{ y } y = V \text{ sen } \theta$$

Equivalentemente, si se tiene representado un vector por medio de coordenadas cartesianas y queremos expresarlo por medio de coordenadas polares, las fórmulas de transformación serían:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ y } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

con: $x \neq 0$.

El ángulo formado por el vector y el eje horizontal positivo puede tomar valores entre $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$, dependiendo del cuadrante donde se encuentre el vector. Para un vector en el segundo cuadrante, el ángulo θ es mayor a 90° y menor o igual a 180° . Para un vector en el tercer cuadrante, el ángulo θ es mayor a 180° y menor o igual a 270° y para un vector en el cuarto cuadrante, el ángulo θ es mayor a 270° y menor o igual a 360° . En consecuencia, las fórmulas de transformación se deben modificar para que se obtengan las direcciones de los vectores de acuerdo al cuadrante donde se encuentren. Para vectores en el segundo cuadrante el ángulo dado por la ecuación $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ es el que forma el vector con el eje horizontal negativo, el cual no corresponde con la dirección real del vector. Observe la figura 1.4. En consecuencia, es necesario sumarle 180° a este valor para obtener su dirección, es decir:

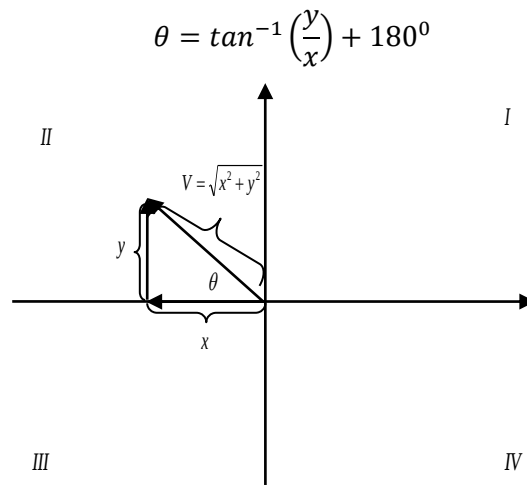


Figura 1.4

Para vectores en el tercer cuadrante el ángulo dado por la ecuación $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ es el que forma el vector con el eje horizontal negativo, el cual no corresponde con la dirección real del vector. En consecuencia, es necesario sumarle 180° a este valor para obtener su dirección, es decir:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + 180^\circ$$

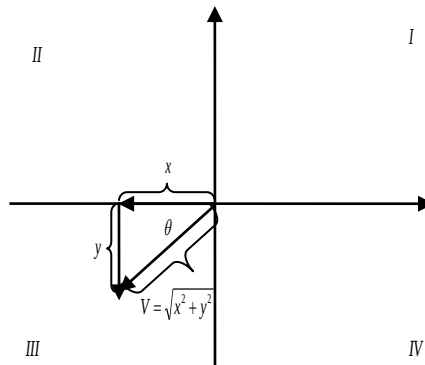


Figura 1.5

Para vectores en el cuarto cuadrante el ángulo dado por la ecuación $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ es el que forma el vector con el eje horizontal positivo, el cual no corresponde con la dirección real del vector. En consecuencia, es necesario sumarle 360° a este valor para obtener su dirección, es decir:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + 360^\circ$$

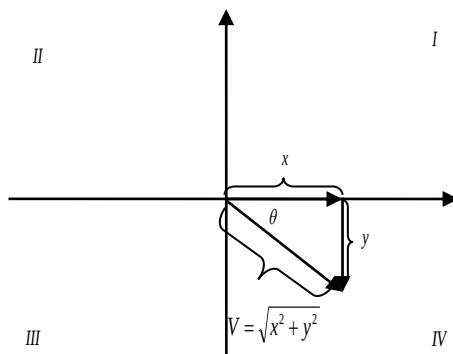


Figura 1.6

Si suponemos que un vector $\vec{V}$ se encuentra representado por coordenadas polares. Las fórmulas de transformación para convertirlas a coordenadas cartesianas están dadas por:

$$x = V \cos \theta \text{ y } y = V \sin \theta$$

El ángulo formado por el vector y el eje horizontal positivo puede tener valores entre 0° y 360° dependiendo del cuadrante donde se encuentre. Para un vector en el primer cuadrante el ángulo θ se encuentra entre 0° y 90° . Para un vector en el segundo cuadrante el ángulo θ se encontrará entre 90° y 180° ; para el tercer cuadrante, θ se encuentra entre 180° y 270° , y para el cuarto cuadrante, θ se encontrará entre 270° y 360° .

Para un vector en el primer cuadrante la abscisa y la ordenada son positivas. Para un vector en el segundo cuadrante, la abscisa es negativa y la ordenada es positiva. Para el cuarto cuadrante ambas coordenadas son negativas y, finalmente, para un vector en el tercer cuadrante, la abscisa será positiva y la ordenada negativa. Observe la figura 1.7.

Al aplicar las fórmulas de transformación de coordenadas polares a cartesianas, los signos de cada componente se obtendrán directamente. La siguiente tabla muestra los signos de cada componente dependiendo del valor del ángulo o de la dirección del vector.

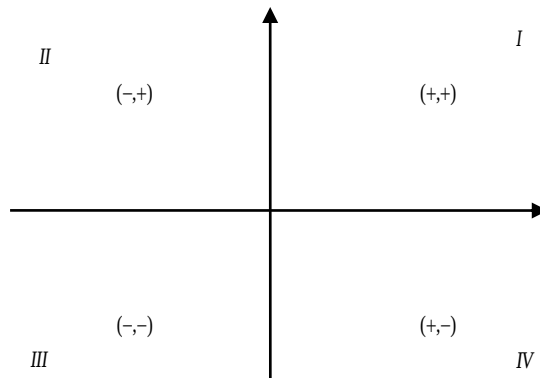


Figura 1.7

Ángulo	Cuadrante	x	y
--------	-----------	-----	-----

$0 \leq \theta < 90^\circ$	Primer.	Positivo.	Positivo.
$90^\circ < \theta \leq 180^\circ$	Segundo.	Negativo.	Positivo.
$180^\circ < \theta < 270^\circ$	Tercer.	Negativo.	Negativo.
$270^\circ < \theta < 360^\circ$	Cuarto.	Positivo.	Negativo.

1.6 Suma de vectores: método analítico

En esta sección sumaremos vectores que se encuentran expresados en coordenadas polares. A menudo se presentan vectores expresados en coordenadas polares y tenemos necesidad de obtener la resultante de esos vectores al estar aplicados a un punto. Daremos a continuación un método para sumar vectores expresados en forma polar.

El método consiste en tres pasos:

1.- Cuando tenemos un conjunto de vectores, expresados en forma polar, es necesario expresarlos en forma cartesiana para poderlos sumar. Las ecuaciones de transformación son las siguientes:

$$x = V \cos \theta \text{ y } y = V \sin \theta$$

2.- Este paso consiste en sumar los vectores expresados en coordenadas cartesianas, sumando abscisas con abscisas y ordenadas con ordenadas. Las fórmulas para realizar estas operaciones se expresan a continuación:

$$x_t = \sum_{i=1}^n x_i \text{ y } y_t = \sum_{i=1}^n y_i$$

3.- Finalmente es necesario expresar el vector resultante en coordenadas polares. Para ello se utilizan las siguientes fórmulas de transformación:

$$V = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ y } \theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

Ejemplo 1.17

Suma los siguientes vectores utilizando el método analítico para la suma de vectores.

$$\vec{V}_1 = (2, 10^\circ), \vec{V}_2 = (5, 110^\circ), \vec{V}_3 = (10, 200^\circ) \text{ y } \vec{V}_4 = (3, 300^\circ)$$

Expresar los vectores en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} x_1 &= V_1 \cos \theta_1 = 2 \cos 10^\circ = 1.9696 \text{ y } y_1 = V_1 \sin \theta_1 = 2 \sin 10^\circ = 0.3473 \\ x_2 &= V_2 \cos \theta_2 = 5 \cos 110^\circ = -1.7101 \text{ y } y_2 = V_2 \sin \theta_2 = 5 \sin 110^\circ = 4.6984 \\ x_3 &= V_3 \cos \theta_3 = 10 \cos 200^\circ = -9.3969 \text{ y } y_3 = V_3 \sin \theta_3 = 10 \sin 200^\circ = -3.4202 \\ x_4 &= V_4 \cos \theta_4 = 3 \cos 300^\circ = 1.5 \text{ y } y_4 = V_4 \sin \theta_4 = 3 \sin 300^\circ = -2.598 \end{aligned}$$

Sumar los vectores.

Después de haber hecho la transformación de coordenadas, el segundo paso consiste en sumar los cuatro vectores de acuerdo a la suma de vectores en coordenadas cartesianas.

$$\begin{aligned} x_t &= \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.9696 - 1.7101 - 9.3969 + 1.5 = -7.6074 \\ y_t &= \sum_{i=1}^n y_i = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0.3473 + 4.6984 - 3.4202 - 2.598 = -0.9725 \end{aligned}$$

Expresar el vector resultante en coordenadas polares.

El tercer paso consiste en transformar el vector resultante de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. Con ello se expresará el vector resultante en términos de su magnitud y dirección.

$$V_t = \sqrt{x_t^2 + y_t^2} = \sqrt{(-7.6074)^2 + (-0.9725)^2} = \sqrt{58.8183} = 7.67$$

Como el vector resultante se encuentra en el tercer cuadrante por tener ambas coordenadas negativas, es necesario sumar 180° al resultado de la aplicación de la función inversa de la tangente del cociente de la ordenada entre la abscisa del vector resultante, es decir:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-0.9725}{-7.6074} \right) + 180^\circ = 7.2849^\circ + 180^\circ = 187.2849^\circ$$

Ejemplo 1.18

Presentamos a continuación otro ejemplo para seguir ilustrando la serie de pasos necesarios para la suma de vectores por el método analítico.

$$\vec{V}_1 = (4, 45^\circ), \vec{V}_2 = (2, 160^\circ) \text{ y } \vec{V}_3 = (3, 310^\circ).$$

Expresar los vectores en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} x_1 &= V_1 \cos \theta_1 = 4 \cos 45^\circ = 2.8284 \text{ y } y_1 = V_1 \sin \theta_1 = 4 \sin 45^\circ = 2.8284 \\ x_2 &= V_2 \cos \theta_2 = 2 \cos 160^\circ = -1.8794 \text{ y } y_2 = V_2 \sin \theta_2 = 2 \sin 160^\circ = 0.6840 \\ x_3 &= V_3 \cos \theta_3 = 1 \cos 310^\circ = 0.6428 \text{ y } y_3 = V_3 \sin \theta_3 = 1 \sin 310^\circ = -0.7660 \end{aligned}$$

Sumar los vectores.

Después de haber hecho la transformación de coordenadas, el segundo paso consiste en sumar los cuatro vectores de acuerdo a la suma de vectores en coordenadas cartesianas.

$$x_t = \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + x_3 = 2.8284 - 1.8794 + 0.6428 = 1.5918$$

$$y_t = \sum_{i=1}^n y_i = y_1 + y_2 + y_3 = 2.8284 + 0.6840 - 0.7660 = 2.7464$$

Expresar el vector resultante en coordenadas polares.

El tercer paso consiste en transformar el vector resultante de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. Con ello se expresará el vector resultante en términos de su magnitud y dirección.

$$V_t = \sqrt{x_t^2 + y_t^2} = \sqrt{(1.5918)^2 + (2.7464)^2} = \sqrt{10.0765} = 3.1743$$

Como el vector resultante tiene ambas coordenadas positivas, por lo que se encuentra en el primer cuadrante. En consecuencia, la dirección del vector resultante es igual a:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{2.7464}{1.5918} \right) = 59.90^\circ$$

1.7 Ley de los cosenos

La ley de los cosenos nos da la magnitud de la suma de dos vectores en función de su magnitud y del ángulo formado entre ellos. La Ley de los cosenos se podrá deducir a partir de la aplicación de la ecuación de la magnitud de la suma de dos vectores en coordenadas cartesianas.

Sean $\vec{V}_1 = (x_1, y_1)$ y $\vec{V}_2 = (x_2, y_2)$ dos vectores.

La suma está expresada de la siguiente forma:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2, r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2)$$

Aplicando la ecuación que calcula la magnitud de un vector, se obtiene:

$$V^2 = (r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2)^2 + (r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2)^2$$

Desarrollando, se tiene:

$$V^2 = r_1^2 \cos^2 \theta_1 + r_2^2 \cos^2 \theta_2 + 2r_1 r_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + r_1^2 \sin^2 \theta_1 + r_2^2 \sin^2 \theta_2 + 2r_1 r_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

Agrupando términos:

$$V^2 = r_1^2 (\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) + r_2^2 (\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2) + 2r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

Como $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ y $\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(\theta_2 - \theta_1)$. Al sustituir estas igualdades, la expresión anterior se simplifica a:

$$V^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Esta expresión corresponde al cuadrado de la magnitud de la suma de dos vectores en función de su magnitud y del ángulo entre ellos. Esta expresión es conocida como Ley de los Cosenos. La relación $(\theta_1 - \theta_2)$ representa el ángulo entre los vectores. Observe la figura 1.8. Si el ángulo entre ellos es cero, la magnitud del cuadrado de la suma de los vectores es máxima y si el ángulo entre ellos es de 180° , el cuadrado de la magnitud de la suma es mínima. Para ángulos entre 0° y 180° , el cuadrado de la magnitud adquiere valores intermedios entre el máximo y mínimo. El cuadrado de la magnitud de la suma de dos vectores es cero si forman un ángulo de 180 grados y sus magnitudes son iguales.

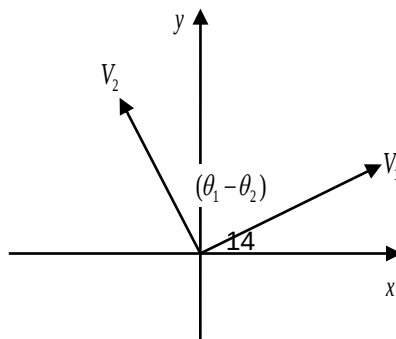


Figura 1.8

El cuadrado de la magnitud de la resta de dos vectores está dado por la siguiente expresión:

$$V^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Observe que las expresiones para la suma y la resta, solo difieren en el signo que está antepuesto a la expresión $2 r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$. En consecuencia, el cuadrado de la resta de dos vectores es máxima si el ángulo entre ellos es de 180° y mínima si es de 0° . Note también que $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ es igual a $\cos(\theta_2 - \theta_1)$ por lo que el orden de la resta de los ángulos no altera el resultado de la función Coseno. Si el ángulo entre los vectores es de 90° , el cuadrado de la magnitud de la suma de ambos vectores es igual al cuadrado de la resta, ya que $\cos 90^\circ = 0$ por lo que el término $2 r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$ desaparece y se conserva la suma $r_1^2 + r_2^2$ que es igual en ambos casos.

Ejemplo 1.19

Supongamos que se tienen dos vectores dados por: $\vec{V}_1 = (7, 20^\circ)$ y $\vec{V}_2 = (6, 230^\circ)$. Encontrar la magnitud de su suma.

$$V^2 = (7)^2 + (6)^2 + 2(7)(6)\cos(230^\circ - 20^\circ) = 49 + 36 + 84 \cos(170^\circ) = 85 - 82.72 = 2.28$$

Extrayendo raíz cuadrada en ambos términos de la ecuación, se obtiene la longitud de la suma de estos vectores.

$$V = 1.51$$

Ejemplo 1.20

Supongamos que ahora se tienen dos vectores dados por: $\vec{V}_1 = (6, 30^\circ)$ y $\vec{V}_2 = (6, 210^\circ)$. Encontrar la magnitud de su suma.

$$V^2 = (6)^2 + (6)^2 + 2(6)(6)\cos(210^\circ - 30^\circ) = 36 + 36 + (72)\cos(180^\circ) = 72 - 72 = 0$$

Extrayendo raíz cuadrada en ambos términos de la ecuación, se obtiene la longitud de la suma de estos vectores.

$$V = 0$$

Por lo tanto:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{0}$$

Es decir, el vector $\vec{V}_1$ es el inverso aditivo del vector $\vec{V}_2$. Por lo que la suma es igual al vector cero.

Ejemplo 1.21

Encontrar el ángulo entre los vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$, si sus magnitudes son $V_1 = 7$ y $V_2 = 6$ cuando el valor de la magnitud de la suma es de $V = 10$.

Aplicando la Ley de los Cosenos, se tiene:

$$V^2 = (10)^2 = (7)^2 + (6)^2 + 2(7)(6)\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Despejando $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ de la ecuación anterior:

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \frac{100 - 49 - 36}{84} = \frac{15}{84} = 0.1786$$

Y aplicando finalmente la función inversa del coseno, obtenemos el ángulo entre los vectores:

$$(\theta_1 - \theta_2) = \cos^{-1}(0.1786) = 79.71^\circ$$

Ejemplo 1.22

Encontrar el ángulo entre los vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$, si sus magnitudes son $V_1 = 7$ y $V_2 = 8$ cuando el valor de la magnitud de la suma es de $V = 10$.

Aplicando la Ley de los Cosenos, se tiene:

$$V^2 = (10)^2 = (7)^2 + (8)^2 + 2(7)(8)\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Despejando $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ de la ecuación anterior:

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \frac{100 - 49 - 64}{112} = \frac{-13}{112} = -0.1161$$

Y aplicando finalmente la función inversa del coseno, obtenemos el ángulo entre los vectores:

$$(\theta_1 - \theta_2) = \cos^{-1}(-0.1161) = 96.67^\circ$$

Observe que el ángulo entre los dos vectores es mayor a 90° .

Ejemplo 1.23

Encontrar el ángulo entre los vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$, si sus magnitudes son $V_1 = 7$ y $V_2 = 8$ cuando el valor de la magnitud de la suma es de $V = 20$.

Aplicando la Ley de los Cosenos, se tiene:

$$V^2 = (20)^2 = (7)^2 + (8)^2 + 2(7)(8)\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Despejando $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ de la ecuación anterior, se tiene:

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \frac{400 - 49 - 64}{112} = \frac{287}{112} = 2.5625$$

Y aplicando finalmente la función inversa del coseno, vemos que el ángulo entre los vectores no existe, por lo que concluimos que el dato de la magnitud excede a la máxima magnitud posible entre ambos vectores. La máxima magnitud entre estos vectores es de 15 unidades. De aquí concluimos que $|\cos(\theta_1 - \theta_2)| \leq 1$, es decir, el coseno del ángulo entre ambos vectores debe ser mayor o igual a -1 y menor o igual a 1. No está definida la función coseno para valores fuera de este intervalo.

Ejemplo 1.24

Encontrar el ángulo entre los vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$, si sus magnitudes son $V_1 = 5$ y $V_2 = 5$ cuando el valor de la magnitud de la suma es de $V = 10$.

Aplicando la Ley de los Cosenos, se tiene:

$$V^2 = (10)^2 = (5)^2 + (5)^2 + 2(5)(5)\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Despejando $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ de la ecuación anterior:

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \frac{100 - 25 - 25}{50} = \frac{50}{50} = 1$$

Y aplicando finalmente la función inversa del coseno, vemos que el ángulo entre los vectores es igual a:

$$(\theta_1 - \theta_2) = \cos^{-1}(1) = 0^\circ$$

Por lo tanto $\theta_1 = \theta_2$.

En consecuencia, ambos ángulos coinciden.

Ejemplo 1.25

Encontrar el ángulo entre los vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$, si sus magnitudes son $V_1 = 5$ y $V_2 = 5$ cuando el valor de la magnitud de la suma es de $V = 0$.

Aplicando la Ley de los Cosenos, se tiene:

$$V^2 = (0)^2 = (5)^2 + (5)^2 + 2(5)(5)\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Despejando $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ de la ecuación anterior:

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \frac{0 - 25 - 25}{50} = \frac{-50}{50} = -1$$

Y aplicando finalmente la función inversa del coseno, vemos que el ángulo entre los vectores es igual a:

$$(\theta_1 - \theta_2) = \cos^{-1}(-1) = 180^\circ$$

En consecuencia, el ángulo formado entre ambos vectores es de 180° .

Ejemplo 1.26

Cuando el ángulo formado por los dos vectores es de 90° , la magnitud de la suma es igual a la magnitud de la resta de los dos vectores. Para demostrar esta afirmación, utilicemos la Ley de los Cosenos:

$$V_{\text{suma}}^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Como $\cos(90^\circ) = 0$

En consecuencia, se tiene:

$$V_{\text{suma}}^2 = r_1^2 + r_2^2$$

y

$$V_{Re sta}^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Como $\cos(90^\circ) = 0$,

En consecuencia se tiene:

$$V_1 + V_2 = r_1^2 + r_2^2$$

Comparando ambas ecuaciones, concluimos que:

$$V_{Suma}^2 = V_{Re sta}^2$$

Es decir:

$$V_{Suma} = V_{Re sta}$$

En consecuencia, cuando el ángulo entre dos vectores es de 90° , la magnitud de la suma es igual a la magnitud de su resta.

1.8 Suma de vectores: método gráfico

Para representar un vector en un diagrama dibujamos una flecha. Escogemos la longitud de la flecha de tal manera que sea proporcional a la magnitud del vector y dirigimos la flecha en la misma dirección del vector, de modo que su punta indique el sentido de éste. Por ejemplo, un desplazamiento de 40 metros al noreste (NE) quedaría representado en una escala donde 1 cm. equivale a 10 metros, por una flecha de 4 unidades, dibujada a 45° por encima de una línea dirigida hacia el este y cuya flecha se encontrará en el extremo superior derecho. Un vector como éste se representa convenientemente en letras de imprenta por debajo de una flecha, por ejemplo $\vec{A}$. Observe la figura 1.9

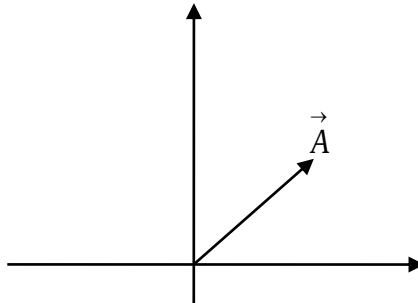


Figura 1.9

Suponga que un cuerpo se desplaza siguiendo la dirección del vector $\vec{A}$ representado en la figura 1.10. Después sufre otro movimiento siguiendo la dirección del vector $\vec{B}$. El efecto neto de ambos desplazamientos está representado por el vector $\vec{C}$, el cual es un vector que parte del origen y llega hasta el extremo del último vector. Para hallar la suma de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, dibujamos a partir del extremo del vector $\vec{A}$, un vector igual a $\vec{B}$.

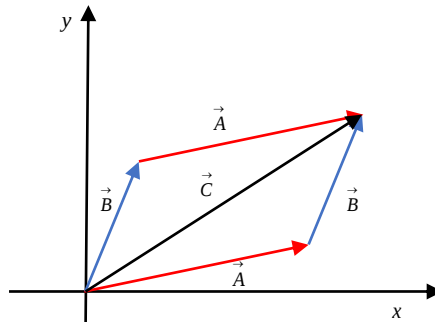


Figura 1.10

Observe en la figura 1.10 que es equivalente que el cuerpo se desplace primeramente siguiendo la dirección del vector $\vec{B}$ y después se desplace en la dirección marcada por el vector $\vec{A}$. En ambas situaciones, el cuerpo llega a la misma posición. Puede concluirse a partir de la figura 1.10 que la suma de vectores es independiente del orden en que se sumen. Es decir:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

Por lo tanto se dice que los vectores son conmutativos con respecto a la adición.

Observe en la figura 1.10 que la suma gráfica de estos vectores condujo a la construcción de un paralelogramo.

Por otra parte, la suma de tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ puede obtenerse sumando $\vec{C}$ al resultado de $\vec{A} + \vec{B}$. La figura 1.11 muestra geoméricamente que la suma de tres o más vectores es independiente del orden de la adición. Por ejemplo:

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = (\vec{A} + \vec{C}) + \vec{B}$$

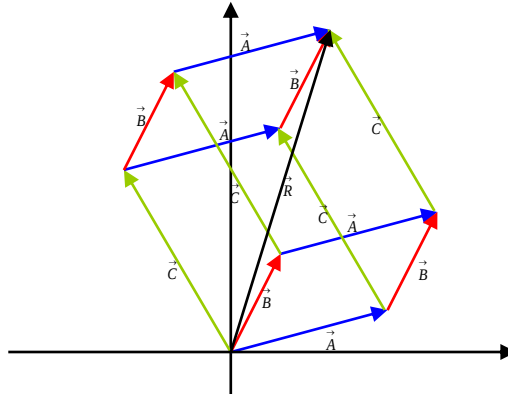


Figura 1.11

Esta ley se llama ley asociativa de la adición. Existen seis diferentes formas en que se pueden sumar gráficamente tres vectores. Si fuesen 4 vectores, serían 24 formas diferentes en que se pueden sumar. El número de formas en que se pueden sumar los vectores está relacionado con el factorial de un número. El factorial de un número se define como sigue:

$$n! = 1 * 2 * 3 \dots n \text{ para } n \geq 1 \text{ y } 0! = 1$$

Así, para un conjunto de 5 vectores se tiene que son 120 formas diferentes de sumarlos.

Por otra parte, para restar el vector $\vec{B}$ del vector $\vec{A}$, primero dibujamos los vectores a partir de un origen común. El vector $-\vec{B}$ se define como un vector cuya longitud es idéntica y su sentido es opuesto al original. La resta del vector $\vec{A}$ menos el vector $\vec{B}$ se define como la suma del vector $\vec{A}$ más el vector $-\vec{B}$, es decir:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

La figura 1.12 muestra estos vectores, con su respectiva operación.

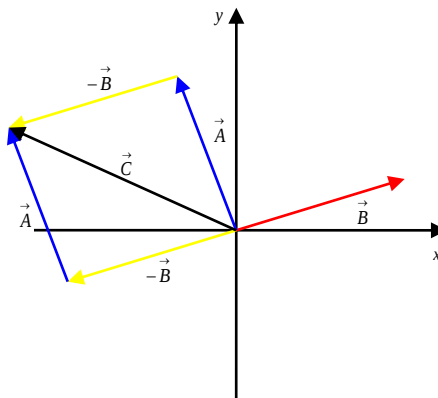


Figura 1.12

De acuerdo con la definición de sustracción, la longitud de $\vec{A} - \vec{A}$ es cero. Un vector de longitud cero se dice que es el vector cero.

1.9 Preguntas y problemas

Preguntas

- 1.- Enuncie los significados de magnitud escalar y magnitud vectorial.
- 2.- Enuncie las fórmulas de transformación de coordenadas polares a coordenadas cartesianas.
- 3.- Enuncie las fórmulas de transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas polares.
- 4.- Describa el método del paralelogramo y del polígono para la suma de vectores.
- 5.- Describa la suma de vectores por el método analítico.

Problemas

- 1.- Dibuje sobre el plano cartesiano los siguientes vectores:
a).- (2, -3) b).- (-5, -5) c).- (-1, 7) d).- (1, 2) e).- (-4, 4) f).- 1.7, 2.3)
g).- (-2.5, -4.7) h).- (1.7, -6) i).- 3(3, 1) j).- 2(-3, 2) k).- -2(-6, -2) l).- (5, -2)
- 2.- Dados los siguientes vectores, realice las operaciones que se indican:
 $A = (1, 2)$, $B = (-2, 3)$, $C = (-3, -4)$ y $D = (4, -5)$

a).- $A+B+C+D$ b).- $2B+3C$ c).- $A-B-C+D$ d).- $2A-4D$ e).- $5(A+B)+2(C+D)$
f).- $2A+3B+4C+5D$ g).- $5A-4B+3C-2D$ h).- $7A-7B$ i).- $4B+3B-5C$ j).- $A-B+C-D$
- 3.- Transforme de coordenadas cartesianas a coordenadas polares los siguientes vectores:
a).- (-3, -3) b).- (1.8, -6) c).- (1, 2) d).- (-2, 3.1) e).- (4, -5)
f).- (10, 5) g).- (-2, -1) h).- (7, -1) i).- (3, 0) j).- (0, -0.5)
- 4.- Transforme de coordenadas polares a coordenadas cartesianas los siguientes vectores:
a).- (1, 0°) b).- (3, 90°) c).- (5, 180°) d).- (7, 125°) e).- (2, 45°)
f).- (4, 270°) g).- (1.5, 170°) h).- (3, 240°) i).- (2.5, 330°) j).- (4, 400°)
- 5.- Por la ley de los cosenos calcule la resultante de la suma y de la resta de los siguientes vectores:
a).- $A = (1, 2)$ y $B = (-3, -4)$, b).- $A = (-1, -4)$ y $B = (4, -5)$,
c).- $A = (-5, 3)$ y $B = (2, -1)$, d).- $A = (3, -5)$ y $B = (6, 3)$,
e).- $A = (-6, 2)$ y $B = (-3, 4)$, f).- $A = (1, 4)$ y $B = (-2, -5)$,
- 6.- Por el método analítico, efectúe la suma de los siguientes vectores:
a).- $A+B+C$ donde: $A=(7, 30^\circ)$, $B=(5, 150^\circ)$ y $C=(3, 200^\circ)$.
b).- $A-B-3C$ donde: $A=(6, 40^\circ)$, $B=(4, 170^\circ)$ y $C=(2, 220^\circ)$.
c).- $2A+3C$ donde: $A=(3, 10^\circ)$ y $C=(6, 190^\circ)$.
d).- $-3A+4B$ donde: $A=(7, 25^\circ)$ y $B=(4, 220)$.
e).- $3(A+B)+2(C+D)$ donde: $A=(3, 45^\circ)$, $B=(3, 210^\circ)$, $C=(6, 170^\circ)$ y $D=(9, 350^\circ)$.
- 7.- Por el método gráfico, encuentre la suma de los siguientes vectores:
a).- $A+B+C$ donde: $A=(3, 2)$, $B=(2, 3)$ y $C=(-5, 1)$.
b).- $A-B$ donde: $A=(-3, -1)$ y $B=(4, 1)$.
c).- $2A+3B$ donde: $A=(-4, 2)$ y $B=(-3, -3)$.
d).- $5A+3B-2C$ donde: $A=(1, 2)$, $B=(-2, 3)$ y $C=(-3, -4)$.
e).- $2(A+B)-3C$ donde: $A=(2, 2)$, $B=(1, -3)$ y $C=(2, -4)$.

Relaciona ambas columnas colocando el número de la columna de la derecha en el correspondiente paréntesis de la columna derecha:

- 1.- Es una cantidad que está representada por un número. () $r_T^2 = r_A^2 + r_B^2 - 2 r_A r_B \cos(\theta_B - \theta_A)$

- 2.- Es una cantidad que además de estar representada por un número requiere de dirección y sentido. () Método del Paralelogramo.
- 3.- Con esta fórmula se calcula la componente horizontal de un vector. () $r_T^2 = r_A^2 + r_B^2 + 2 r_A r_B \cos(\theta_B - \theta_A)$
- 4.- Con esta fórmula se calcula la componente vertical de un vector. () Método del Polígono.
- 5.- Con esta fórmula se calcula la magnitud de un vector. () Vector.
- 6.- Con esta fórmula se calcula la dirección de un vector. () $r \cos \theta$
- 7.- Con este método se suman gráficamente dos vectores al formar con ellos un paralelogramo. () Escalar.
- 8.- Con este método se suman gráficamente varios vectores al colocarlos uno a continuación de otro. () $\sqrt{x^2 + y^2}$
- 9.- Es la ley de los Cosenos para la suma de dos vectores. () $r \sin \theta$
- 10.- Es la ley de los Cosenos para la resta de dos vectores. () $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

2 CINEMÁTICA

2.1 Concepto de cinemática

La Cinemática es la ciencia de la Mecánica que describe el movimiento de los cuerpos sin preocuparnos por conocer sus causas. El estudio de las causas de los cambios de un movimiento dado es objeto de la Dinámica y constituye el tema propio de la Mecánica. El estudio detallado del movimiento de un cuerpo es bastante complejo. Se hace necesario hacer algunas simplificaciones que nos faciliten este estudio. Así, estudiaremos sólo el movimiento de un cuerpo como si fuera una partícula. Decimos que un cuerpo es una partícula cuando sus dimensiones son muy pequeñas en comparación con las demás dimensiones que participan en el movimiento. Cuando un cuerpo se trata como partícula, se simplifica enormemente el estudio de su movimiento, pues cualquier movimiento de rotación que pueda tener el cuerpo a un eje que pasa por el cuerpo, es despreciable, y puede simplemente despreciarse.

2.2 Concepto de movimiento

Una de las características del movimiento de los cuerpos es su relatividad o dependencia respecto del observador que estudia el movimiento. El movimiento de un cuerpo depende del punto o sistema de referencia, esto es, un cuerpo puede estarse moviendo con respecto a un punto de referencia y estar en reposo con respecto a otro punto de referencia. En consecuencia, no existe el verdadero movimiento pues todos son igualmente verdaderos. Tomemos en cuenta que, cuando nos refiramos al movimiento de un cuerpo, debemos mencionar obligatoriamente el punto de referencia. En general tomaremos como punto de referencia a la Tierra. Finalmente, el movimiento es el cambio de posición con respecto a un punto o sistema de referencia.

2.3 Movimiento rectilíneo uniforme

El movimiento rectilíneo uniforme es el más simple de los movimientos ya que la trayectoria seguida por un cuerpo es una línea recta y su velocidad permanece constante.

Para aclarar un poco más estos conceptos, suponga que una persona camina sobre una banqueta a razón de 2 metros en cada segundo. Por consiguiente, cada vez que se mida lo que recorre en un segundo, se encontrará que son exactamente dos metros. Ese andarín recorre distancias iguales en tiempos iguales. Un movimiento que cumple con esta característica se llama uniforme. Después de transcurridos 2 segundos, el caminante habrá recorrido 4 metros; a los 3 segundos su recorrido será de 6 metros, etc. De esta forma, si efectuamos el cociente de la distancia total recorrida entre el tiempo empleado para recorrerla, se observará que el resultado es constante, es decir:

$$\frac{2 \text{ m}}{1 \text{ s}} = \frac{4 \text{ m}}{2 \text{ s}} = \frac{6 \text{ m}}{3 \text{ s}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

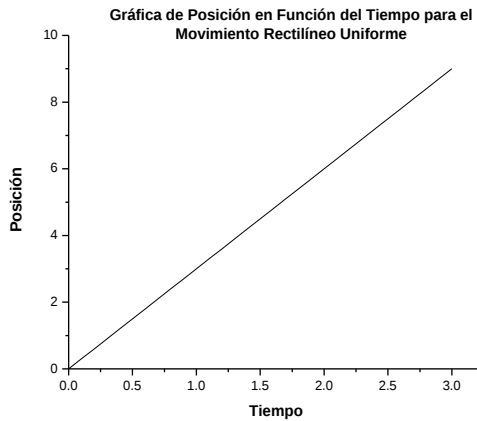


Figura 2.1

A esta razón se le conoce con el nombre de velocidad y si no varía en todo el recorrido que efectúa el objeto, la velocidad se dice que es constante.

En base a lo anterior estableceremos una ecuación que permita encontrar la velocidad de un cuerpo cuando éste se mueve con una velocidad constante a partir de la distancia recorrida y del tiempo empleado para ello.

En forma equivalente, si se conoce la velocidad v con la que un cuerpo se mueve en un movimiento rectilíneo uniforme y además se conoce el tiempo t que tarda en realizar el movimiento, la distancia total recorrida se calculará por medio de la siguiente ecuación:

$$d = v t$$

La ecuación para la distancia que hemos establecido tiene una representación gráfica. Supongamos que sobre un plano cartesiano, el eje vertical juega el papel de la posición y el eje horizontal el del tiempo. Si para una serie de datos graficamos los puntos correspondientes a la posición con el tiempo empleado para recorrerla y los unimos por medio de una línea continua, observaremos que esa línea será recta y además pasará por el origen. En la siguiente figura se muestra las gráficas de dos movimientos, uno con velocidad de $2 \frac{m}{s}$ y el otro con velocidad de $3 \frac{m}{s}$.

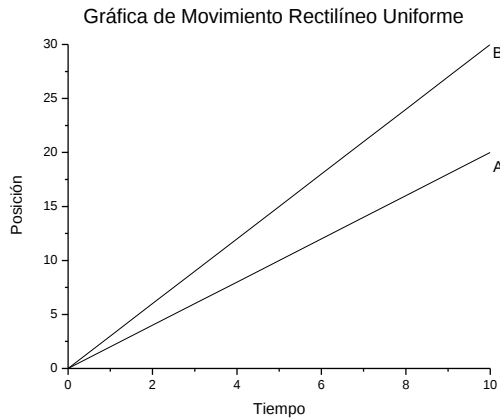


Figura 2.2

Observe que ambos movimientos están representados por una línea recta, con la diferencia de que la recta del movimiento con mayor velocidad tiene mayor inclinación en comparación con el movimiento de menor velocidad. Lo anterior nos permite afirmar que la gráfica de posición en función del tiempo en un Movimiento Rectilíneo Uniforme es una línea recta y que su inclinación o pendiente es proporcional a su velocidad. A mayor velocidad, mayor inclinación o pendiente y a menor velocidad, menor inclinación o pendiente.

La velocidad que lleve un cuerpo en el MRU también puede tener una representación gráfica. Si ubicamos ahora la velocidad sobre el eje vertical y el tiempo en el horizontal, la gráfica resultante será una línea recta paralela al eje de las abscisas. En la figura siguiente se representan las gráficas de las velocidades de ambos movimientos.

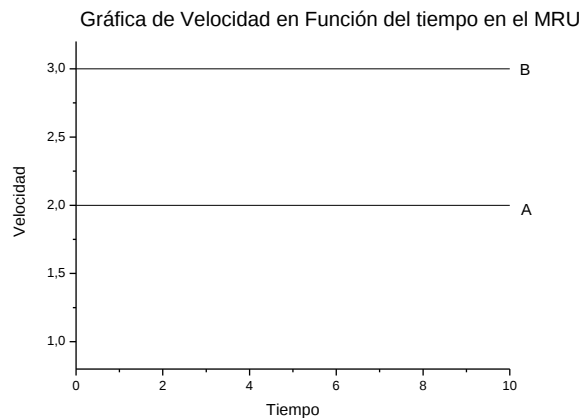


Figura 2.3

Observe en la figura que las gráficas son dos líneas rectas paralelas al eje de las abscisas. La de mayor altura corresponde al movimiento con mayor velocidad.

Hasta ahora se ha utilizado indistintamente los términos posición y distancia cuyo significado no es el mismo. El término posición corresponde al lugar donde un objeto se encuentra con respecto a un

sistema de referencia y la distancia corresponde la longitud que existe entre dos posiciones. En general la ecuación para el MRU está dada por:

$$x = x_0 + v(t - t_0) \quad 2.1$$

Donde: x representa la posición del cuerpo al instante t . A esta posición se le conoce con el nombre de posición final; x_0 representa la posición del cuerpo en el instante t_0 . A esta posición se le conoce como posición inicial; v representa la velocidad del cuerpo y es constante para todo el movimiento y t y t_0 representan los tiempos inicial y final y se considera que $t > t_0$. La posición inicial representa la posición que tiene el cuerpo en el momento en que comienza su movimiento. No necesariamente el cuerpo debe estar en el origen del sistema o punto de referencia, puede estar ubicado en una posición fuera del origen. La posición puede adquirir valores positivos o negativos. Si es positiva, el cuerpo se encontrará a la derecha del origen y si es negativa, se encontrará a la izquierda del mismo, suponiendo que el cuerpo se mueve horizontalmente. De igual forma, el desplazamiento puede ser positivo si el cuerpo se mueve de izquierda a derecha y negativo si se mueve en sentido contrario. Así, el signo de la velocidad indica la dirección del movimiento.

La distancia que recorre un cuerpo está dada por el valor absoluto de la diferencia entre la posición final y la inicial, es decir:

$$d = |x - x_0| \quad 2.2$$

La distancia es la longitud que existe entre dos puntos. La longitud no puede ser negativa, por lo que la diferencia se expresa en valor absoluto. De esta forma, si un cuerpo se desplaza de la posición

a la posición $x = -5 \text{ m}$ entonces la distancia que recorre es de: $x_0 = 3 \text{ m}$

El movimiento de un cuerpo se define como el cambio de posición con respecto a un sistema de referencia. Para un sistema de referencia dado, un cuerpo puede estar moviéndose y para otro sistema ese cuerpo puede estar estático. Por ejemplo, la habitación de un edificio, se encontrará estática en relación con algún punto del edificio y si se viese la habitación desde la luna, veríamos que se encontraría desplazándose junto con el edificio y la Tierra. Es por ello que se dice que el movimiento es relativo, porque depende del sistema de referencia que utilicemos.

La magnitud de la velocidad instantánea es la rapidez y es simplemente el valor absoluto de la velocidad, es decir:

$$v = |v| \quad 2.3$$

Observe que la rapidez es una cantidad positiva y es el resultado de aplicar el valor absoluto de la velocidad. La cantidad que se encuentra entre el símbolo de valor absoluto es la velocidad que corresponde con un vector, es decir la velocidad es un vector que tiene que ver con la dirección con la que se mueve un cuerpo. La rapidez es sólo la magnitud, la dirección la da el ángulo.

Ejemplo 2.1

Una persona camina a razón de 4 m/s a partir de un punto que se encuentra a 10 m del origen de un sistema de referencia. Encuentre la posición de la persona a los 10 segundos de haber iniciado el movimiento y la distancia recorrida.

Solución:

Para esta persona, la velocidad con la que se mueve es de 4 metros en cada segundo y a partir de una posición inicial de 10 m. El tiempo inicial es igual a cero ya que se empieza a mover justo en el momento en que se acciona el cronómetro. De esta forma, la posición final de la persona después de 10 segundos de iniciado el movimiento es de:

$$x = x_0 + v \cdot t = 10 \text{ m} + (4 \text{ m/s})(10 \text{ s}) = 10 \text{ m} + 40 \text{ m} = 50 \text{ m}$$

Y la distancia recorrida corresponde a:

La gráfica de la figura siguiente muestra la posición de la persona a lo largo del tiempo hasta 20 segundos de iniciado el movimiento. Observe que en ese tiempo la posición de la persona es de 90 metros. Este resultado se puede obtener a partir de la ecuación 2.1. Lo importante de la gráfica es que es posible observar a través de ella la posición de la persona para cualquier instante que se encuentre entre 0 y 20 segundos. Se puede observar que en el doceavo segundo la posición de la persona es de 58 metros. También se puede ver que si la persona se encuentra en una posición de 70 metros, el tiempo que ha utilizado para ello es de quince segundos. En consecuencia, el método gráfico es una buena herramienta que nos permite analizar el movimiento de un objeto.

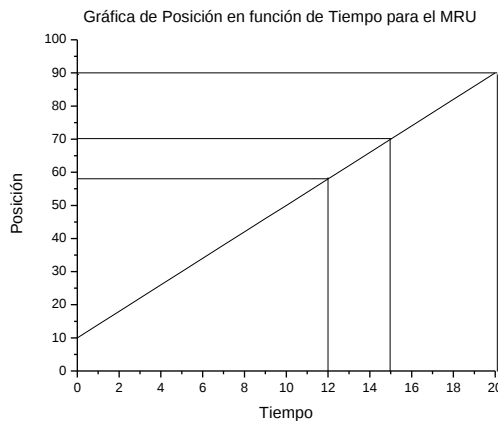


Figura 2.4

Ejemplo 2.2

A partir de una posición de 15 metros del origen de un sistema de referencia, un objeto se encuentra a 55 metros del mismo origen después de 8 segundos. Calcule la velocidad con que se desplaza el objeto y la distancia que recorrió.

Solución:

Para este caso, la velocidad con la que se mueve el objeto se puede encontrar con solo despejar la velocidad de la ecuación 2.1.

$$v = \frac{x - x_0}{t} = \frac{55\text{ m} - 15\text{ m}}{40\text{ s}} = 1\text{ m/s}$$

La velocidad del objeto es de 1 metro por segundo. Si iniciáramos una gráfica con los datos del problema, obtendríamos una recta como la mostrada en la figura siguiente. La distancia recorrida después de 8 segundos de haber iniciado el movimiento, es de:

$$d = v \cdot t = 1\text{ m/s} \cdot 8\text{ s} = 8\text{ m}$$

La gráfica de la figura siguiente muestra la posición del cuerpo hasta 20 segundos de iniciado el movimiento. Observe que en ese tiempo la posición de la persona es de 115 metros. Este resultado se puede obtener a partir de la ecuación 2.1. Lo importante de la gráfica es que es posible observar la posición de la persona para cualquier instante que se encuentre entre 0 y 20 segundos. En consecuencia, se puede observar que en el décimo segundo la posición de la persona es de 65 metros. También se puede ver que si la persona se encuentra en una posición de 90 metros, el tiempo que ha utilizado para ello es de quince segundos.

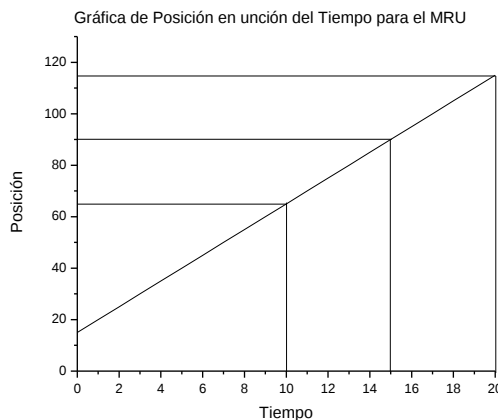


Figura 2.5

Ejemplo 2.3

Una persona se encuentra a 100 metros a la derecha del origen de un sistema de referencia. Si se mueve hacia el origen y tarda 40 segundos en llegar, ¿Cuál es la velocidad con la que se desplaza? ¿En qué instante pasa a los 50 metros del origen? ¿Cómo es la gráfica del movimiento seguido por la persona?

Solución:

La posición de la persona al inicio del movimiento es de 100 metros. Después de 40 segundos se encontrará en el origen. En consecuencia, la posición para este tiempo es de 0 metros. Por lo tanto, la velocidad de la persona es de:

$$v = \frac{x - x_0}{t} = \frac{0 \text{ m} - 100 \text{ m}}{4 \text{ s}} = -25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La velocidad resulta negativa ya que el cuerpo se desplaza de una posición mayor a una menor. Si la posición del cuerpo es de 50 metros, el tiempo que utiliza para pasar por este punto es de:

$$t = \frac{x - x_0}{v} = \frac{50 \text{ m} - 100 \text{ m}}{-25 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 2 \text{ s}$$

La recta de la figura muestra las dos posiciones para cada instante. Observe que la gráfica contiene una recta cuya inclinación o pendiente es contraria a la inclinación de las rectas de las gráficas de los ejemplos anteriores. Esto es debido a que la dirección del movimiento es contraria a la dirección de estos movimientos. Por otra parte, a los 32 segundos de iniciado el movimiento, la persona se encontrará a 20 metros del origen. El tiempo se puede obtener trazando una línea paralela al eje de las abscisas que pase a 20 metros. La línea se debe trazar hasta cruzar la recta que representa el movimiento. En el cruce se debe dibujar otra línea paralela al eje de las ordenadas hasta cruzar el eje de las abscisas. El cruce corresponde a los 32 segundos de iniciado el movimiento. Observe la figura.

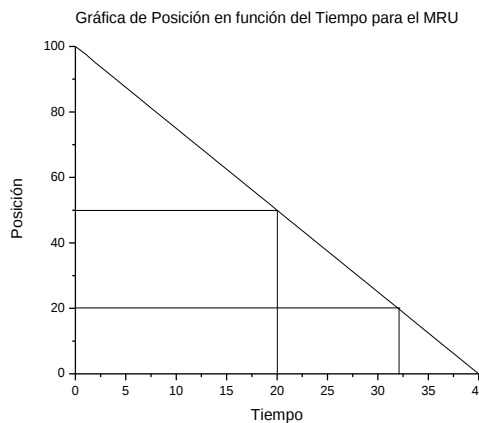


Figura 2.6

Ejemplo 2.4

Un automóvil A parte de la Cd. de México con una velocidad de 80 km/h en dirección a la Cd. de Cuernavaca. Simultáneamente otro automóvil B parte de la Cd. de Cuernavaca hacia la Cd. de México, con una velocidad de 60 km/h. Si la velocidad de los automóviles se mantiene constante durante todo el viaje y la distancia entre ambas ciudades es de 70 km, aproximadamente, encuentre el instante y la posición en que se cruzarán los automóviles. ¿Qué distancia recorrió cada automóvil antes de cruzarse? Haga una gráfica para comprobar sus resultados.

Solución:

Como la velocidad del automóvil A es de 80 km/h y si suponemos que el origen del sistema de referencia se coloca en la Cd. de México, observaremos que la posición inicial de este automóvil es de cero. Para el automóvil B la velocidad es de -60 km/h ya que se desplaza en sentido contrario al movimiento del

auto A y su posición inicial sería de 70 km, con respecto al mismo sistema de referencia. Así, las ecuaciones para el movimiento de ambos automóviles considerando que $t_0 = 0$, son:

$$x_A = x_{0A} + v_{\rightarrow A} (t - t_0) = 0 + \left(80 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) t = \left(80 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) t$$

En el cruce, las posiciones finales de ambos automóviles son iguales. Por lo tanto, ambas ecuaciones se igualarán, es decir:

$$\text{Despejando el tiempo, se tiene: } \left(80 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) t = 70 \text{ km} + \left(-60 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) t$$

$$t = \frac{70 \text{ km}}{80 \frac{\text{km}}{\text{h}} - 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{70 \text{ km}}{20 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 3.5 \text{ h}$$

Que corresponde al instante en que se cruzarán los automóviles. La posición de los autos se puede encontrar sustituyendo el tiempo en cualquiera de las dos ecuaciones que la calculan:

$$\text{De igual forma: } x_A = \left(80 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \left(3.5 \frac{\text{h}}{1}\right) = 280 \text{ km}$$

Observe que ambos resultados coinciden ya que se encuentran en la misma posición. Por medio de una gráfica se puede comprobar datos. Sólo se necesita trazar las rectas que representan el movimiento de los automóviles. El cruce de ambas rectas corresponde al cruce de los automóviles.

Las distancias recorridas por cada automóvil se calculan por medio de la ecuación 2.2:

$$d_A = |x - x_{0A}| = |x_A - x_{0A}| = |280 \text{ km} - 0 \text{ km}| = 280 \text{ km}$$

$$d_B = |x - x_{0B}| = |x_B - x_{0B}| = |280 \text{ km} - 70 \text{ km}| = |210 \text{ km}| = 210 \text{ km}$$

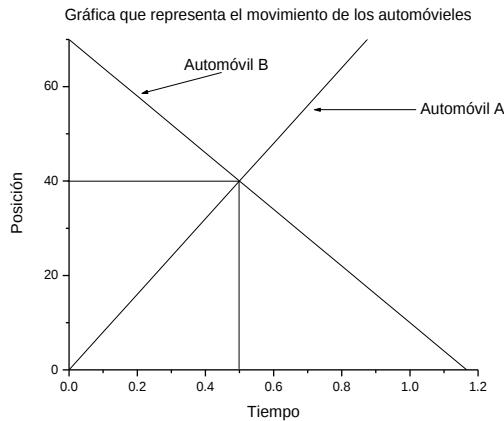


Figura 2.7

Ejemplo 2.5

Un automóvil A se mueve de la Cd. de México con rumbo al Puerto de Acapulco con una velocidad de 80 km/h. Simultáneamente, un automóvil B parte de la Cd. de Cuernavaca rumbo al mismo puerto con una velocidad de 60 km/h. Si la distancia de la Cd. de México y la Cd. de Cuernavaca es de 70 km, aproximadamente, calcule el tiempo y el lugar en que el automóvil A alcanza al automóvil B y la distancia recorrida por cada automóvil. Haga una gráfica para comprobar sus resultados.

Solución:

La velocidad del automóvil A es de 80 km/h y supongamos que el origen del sistema de coordenadas se coloca en la Cd. de México. En consecuencia, la posición inicial de este automóvil es de cero. Para el automóvil B la velocidad es de 60 km/h rumbo al mismo destino y su posición inicial sería de 70 km, con respecto al mismo sistema de referencia. Los tiempos iniciales de ambos automóviles son iguales a cero, debido a que comienzan a moverse en el momento de accionar el cronómetro. De esta forma, las ecuaciones para el movimiento de ambos automóviles son:

$$x_A = x_{0A} + v_A (t - t_{0A}) = 0 + \left(80 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) t = \left(80 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) t$$

En el alcance, las posiciones finales de ambos automóviles son iguales. Por lo tanto ambas ecuaciones deben ser igualadas, es decir:

$$\left(80 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) t = 70 \text{ km} + \left(60 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) t$$

Despejando el tiempo, se tiene:

$$t = \frac{70 \text{ km}}{80 \frac{\text{km}}{\text{h}} - 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{70 \text{ km}}{20 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 3.5 \text{ h}$$

La posición de los automóviles se puede encontrar sustituyendo el tiempo en cualquiera de las dos ecuaciones correspondientes a la posición.

De igual forma
$$x_A = \left(80 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \left(3.5 \frac{\text{h}}{\text{h}}\right) = 280 \text{ km}$$

Observe que ambos resultados coinciden ya que se encuentran en la misma posición. Por medio de una gráfica se puede comprobar estos resultados. Sólo se necesita trazar las rectas que representan el movimiento de los automóviles. El cruce de ambas rectas corresponde al cruce de los automóviles. La recta vertical se traza a partir del punto en el cual el tiempo es igual a 3.5 horas hasta llegar al cruce de las rectas que representan el movimiento de los automóviles. Al trazar una línea horizontal a partir de este punto, vemos que el cruce con el eje de las ordenadas se lleva a cabo a 280 km del origen. Note que el automóvil A no hubiese alcanzado al B si su velocidad fuese menor o igual que la del automóvil B. Geométricamente equivaldría a que las rectas no se cruzaran. En el caso particular en que ambas velocidades fuesen iguales, las rectas serían paralelas.

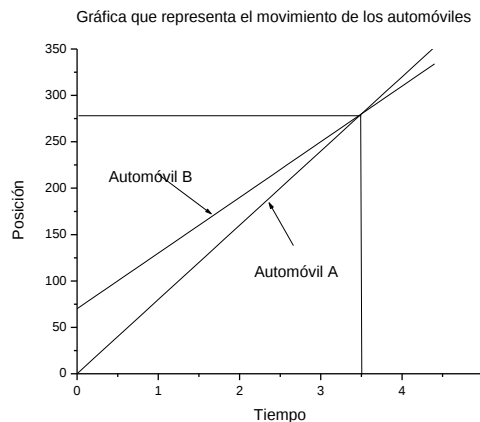


Figura 2.8

Ejemplo 2.6

Un automóvil A se mueve de la Cd. de México con rumbo al Puerto de Acapulco con una velocidad de 60 km/h. Después de dos horas un automóvil B parte de la Cd. de Cuernavaca rumbo al mismo puerto con una velocidad de 80 km/h. Si la distancia de la Cd. de México y la Cd. de Cuernavaca es de 70 km, calcule el tiempo y el lugar en que el automóvil B alcanza al automóvil A y la distancia recorrida por cada automóvil. Haga una gráfica para comprobar sus resultados.

Solución:

La velocidad del automóvil A es de 60 km/h y supongamos que el origen del sistema de coordenadas se coloca en la Cd. de México. En consecuencia, la posición inicial de este automóvil es de cero. Para

el automóvil B la velocidad es de 80 km/h rumbo al mismo destino y su posición inicial es de 70 km, con respecto al mismo sistema de referencia. Los tiempos iniciales de ambos automóviles son diferentes debido a que el auto B comienza su movimiento dos horas después de iniciado el movimiento del auto A, por lo que el auto B lleva dos horas de movimiento menos que el auto A. De esta forma, las ecuaciones para ambos automóviles son:

Y
$$x_A = x_{0A} + v_{\vec{v} \rightarrow A} (t - t_{0A}) = 0 + \left(60 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) t = \left(60 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) t$$

o
$$x_B = x_{0B} + v_{\vec{v} \rightarrow B} (t - t_{0B}) = 70 \text{ km} + \left(80 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) (t - 2 \text{ h})$$

En el alcance, las posiciones finales de ambos automóviles coinciden, por lo que ambas ecuaciones deben ser igualadas, es decir:

Despejando el tiempo, se tiene:
$$\left(60 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) t = \left(80 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) t - 90 \text{ km}$$

$$t = \frac{-90 \text{ km}}{-20 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{90 \text{ km}}{20 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 4.5 \text{ h}$$

Que es el tiempo que tarda el coche A en ser alcanzado.

La posición de los automóviles se puede encontrar sustituyendo el tiempo en cualquiera de las dos ecuaciones correspondientes a la posición.

De igual forma:
$$x_A = \left(60 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \left(4.5 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) = 270 \text{ km}$$

Observe que ambos resultados coinciden ya que se encuentran en la misma posición. Por medio de una gráfica se puede comprobar estos resultados. Sólo se necesita trazar las rectas que representan el movimiento de los automóviles. El cruce de ambas rectas corresponde al alcance de los automóviles. La recta vertical se traza a partir del punto en el cual el tiempo es igual a 4.5 horas hasta llegar al cruce de las rectas que representan el movimiento de los automóviles. Al trazar una línea horizontal a partir de este punto, vemos que el cruce con el eje de las ordenadas se lleva a cabo a 270 km del origen. Note que el automóvil B no hubiese alcanzado al A si su velocidad fuese mayor o igual que la del automóvil B. Geométricamente equivaldría a que las rectas no se cruzaran.

La distancia que recorren ambos autos es:

Y

$$d_A = |x - x_{0_A}| = |x_A - x_{0_A}| = |270 \text{ km} - 0 \text{ km}| = 270 \text{ km}$$

$$d_B = |x - x_{0_B}| = |x_B - x_{0_B}| = |270 \text{ km} - 70 \text{ km}| = |200 \text{ km}| = 200 \text{ km}$$

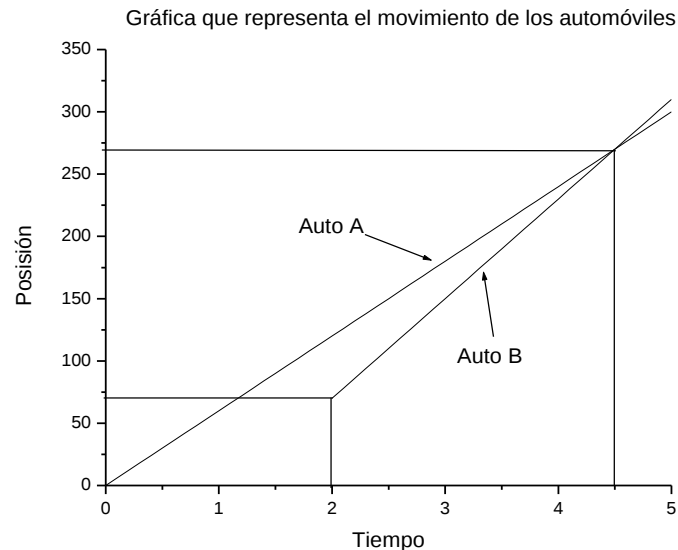


Figura 2.9

En la figura se observa la distancia recorrida por ambos autos. Note que el auto B comienza su movimiento dos horas después de comenzar el movimiento del auto A. De igual forma, se muestra que si la velocidad del auto B fuese menor que la del auto A, no hubiese podido alcanzar al auto A.

Ejemplo 2.7

Un automóvil A parte de la Cd. de México con una velocidad de 100 km/h en dirección a la Cd. de Guadalajara. Después de 3 horas otro automóvil B parte de la Cd. de Guadalajara hacia la Cd. de México, con una velocidad de 80 km/h. Si la velocidad de los automóviles se mantiene constante durante todo el viaje y la distancia entre ambas ciudades es de 600 km aproximadamente, encuentre el instante y la posición en que se cruzarán los automóviles. ¿Qué distancia recorrió cada automóvil antes de cruzarse? Haga una gráfica para comprobar sus resultados.

Solución:

Como la velocidad del automóvil A es de 100 km/h y si suponemos que el origen del sistema de coordenadas se coloca en la Cd. de México, observamos que la posición inicial de este automóvil es de cero. Para el automóvil B la velocidad es de -80 km/h ya que se desplaza en sentido contrario al movimiento del auto A y su posición inicial sería de 600 km, con respecto al mismo sistema de referencia. Los tiempos iniciales de ambos automóviles son diferentes debido a que el auto B comienza su movimiento 3 horas después de iniciado el movimiento del auto A, por lo que el auto B lleva 3 horas

de movimiento menos que el auto A. De esta forma, las ecuaciones para el movimiento de ambos automóviles son:

$$Y \quad x_A = x_{0A} + v_{\vec{e} \rightarrow A} (t - t_0) = 0 + \left(100 \frac{km}{h}\right) t = \left(100 \frac{km}{h}\right) t$$

$$O \quad x_B = x_{0B} + v_{\vec{e} \rightarrow B} (t - t_{0B}) = 600 km + \left(-80 \frac{km}{h}\right) (t - 3 h)$$

En el cruce, las posiciones de ambos automóviles son iguales. Por lo tanto, ambas ecuaciones se deben igualar, es decir:

$$\text{Despejando el tiempo, se tiene: } \left(100 \frac{km}{h}\right) t = 840 km + \left(-80 \frac{km}{h}\right) t$$

$$t = \frac{840 km}{100 \frac{km}{h} - 80 \frac{km}{h}} = \frac{840 km}{20 \frac{km}{h}} = 42 h$$

Que corresponde al instante en que se cruzan los automóviles. La posición de los automóviles se puede encontrar sustituyendo el tiempo en cualquiera de las dos ecuaciones que la calculan:

$$\text{De igual forma: } x_A = \left(100 \frac{km}{h}\right) \left(42 \frac{km}{h}\right) = 4200 km$$

Observe que ambos resultados coinciden ya que se encuentran en la misma posición. Por medio de una gráfica se puede comprobar estos resultados. Sólo se necesita trazar las rectas que representan el movimiento de los automóviles. El cruce de ambas rectas corresponde al cruce de los automóviles. Las distancias recorridas por cada automóvil se calculan por medio de la ecuación 2.2:

$$Y \quad d_A = |x - x_{0A}| = |x_A - x_{0A}| = |4200 km - 0 km| = 4200 km$$

$$d_B = |x - x_{0B}| = |x_B - x_{0B}| = |600 km - 4200 km| = |3600 km| = 3600 km$$

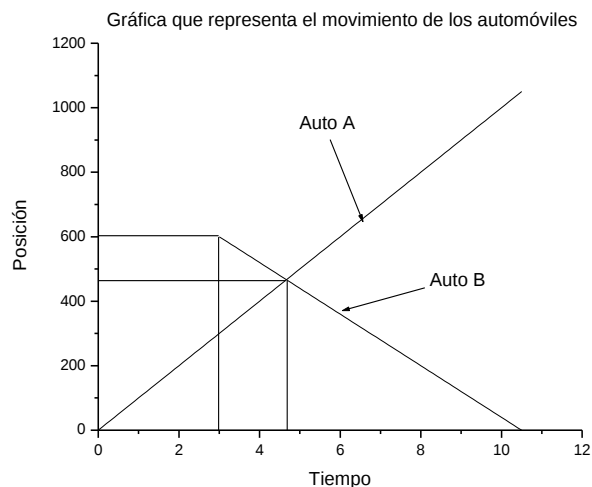


Figura 2.10

En la figura se observa la distancia recorrida por ambos autos. Note que el auto B comienza su movimiento a 3 horas después de comenzar el movimiento del auto A. También se muestra que no importa la velocidad que lleven ambos autos para que se lleve a cabo el cruce, siempre y cuando vayan en direcciones opuestas. Claro está que el auto B debe partir antes del tiempo que tarde el coche A en llegar a la Cd. de Guadalajara para que se puedan cruzar en el camino.

2.4 Movimiento rectilíneo uniformemente variado

Un tipo particular de movimiento es aquel en el cual un cuerpo se desplaza en línea recta y su velocidad cambia de una manera constante; es decir, la velocidad cambia en cantidades iguales para iguales intervalos de tiempo. Sin embargo, la distancia recorrida varía para idénticos intervalos de tiempo, ya que la velocidad del cuerpo cambia de un punto a otro. Al cociente que resulta de dividir el cambio de velocidad sobre el intervalo de tiempo utilizado, se le conoce con el nombre de aceleración promedio. Cuando la aceleración promedio es idéntica para cualquier intervalo de tiempo, se dice que el movimiento es uniformemente acelerado. En este caso la velocidad cambia uniformemente y se establece que la aceleración es constante. Matemáticamente la ecuación que calcula la aceleración con la que se mueve un cuerpo, está dada por:

2.4

A manera de ejemplo, suponga que un objeto comienza su movimiento a partir del momento en que se acciona el cronómetro, de tal forma que en el primer segundo recorre 2.5 m; para el siguiente segundo, se observa que se encuentra a 10.0 m del origen; para el tercer segundo, el objeto se encuentra a 22.5 m y para el cuarto segundo, se encuentra a 40 m.

Como se puede notar en el ejemplo, el cuerpo recorre cada vez mayor distancia conforme el tiempo transcurre. Esto es consecuencia de que la velocidad no es constante, sino que varía uniformemente conforme el tiempo transcurre. Con los datos del ejemplo, es posible construir una gráfica para

visualizar su comportamiento. Por convención, suponga que sobre el plano cartesiano el eje vertical juega el papel de la posición y el eje horizontal, el del tiempo. Al situar los datos y unirlos con una línea continua, observaremos que tiene forma de parábola, la cual cruza el eje vertical justamente en el origen. La figura 2.11 muestra la parábola que fue construida a partir de los datos del ejemplo. La ecuación más general para un movimiento en el cual la aceleración es constante, se expresa en la siguiente ecuación de la parábola:

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a(t - t_0)^2}{2} \quad 2.5$$

donde x_0 y v_0 representan la posición y la velocidad del cuerpo en el instante $t = t_0$. A estos términos se les conoce con el nombre de posición y velocidad inicial, respectivamente. La variable t es el tiempo que utiliza el cuerpo para alcanzar la posición final x . La letra a representa la aceleración experimentada por el cuerpo en su movimiento. Esta aceleración es constante, ya que es lo que caracteriza a este tipo de movimientos. La posición puede adquirir valores positivos o negativos. Si es positiva, el cuerpo se encontrará a la derecha del origen y si

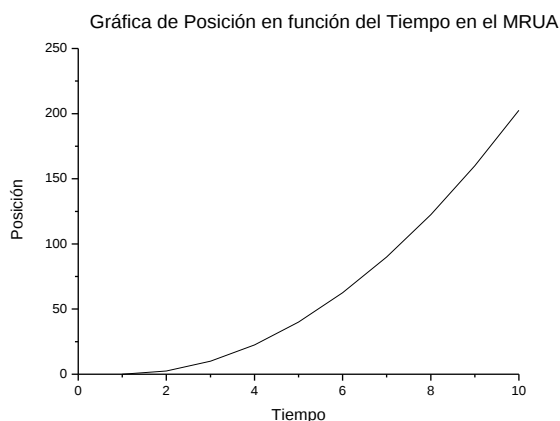


Figura 2.11

es negativa, se encontrará a la izquierda del mismo, suponiendo que el cuerpo se mueve horizontalmente. De igual forma, el desplazamiento puede ser positivo si el cuerpo se mueve de izquierda a derecha y negativo si se mueve en sentido contrario. Así, el signo de la velocidad indica la dirección del movimiento.

Considerando lo anterior, podemos afirmar que existe una equivalencia entre los parámetros que describen al Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado y la parábola asociada a ese movimiento. Así, si conocemos la posición, la velocidad y el tiempo inicial, al igual que la aceleración, será posible trazar su parábola correspondiente. De manera equivalente, conociendo la parábola del movimiento de un cuerpo, podremos determinar tanto la aceleración como la posición y velocidad inicial con solo conocer tres puntos sobre la parábola. Sin embargo, únicamente es posible conocer la posición y la velocidad inicial del objeto cuando su tiempo inicial es igual a cero, ya que existe una infinidad de

tiempos iniciales diferentes de cero para los cuales se les puede asociar una posición y velocidad inicial. Observe que la aceleración es independiente del valor que asuma el tiempo inicial.

Como una aplicación de lo que hemos mencionado, suponga que deseamos conocer los valores de las constantes x_0 , v_0 y a para los datos que hemos utilizado como ejemplo. Lo que se plantea es sustituir en la ecuación 2.5, los tiempos y sus respectivas posiciones de tres puntos de la gráfica, para establecer un sistema de ecuaciones con tres incógnitas. Es decir:

$$\begin{aligned} 2.5 &= x_0 + v_0(1) + \frac{a(1)^2}{2} \\ 10 &= x_0 + v_0(2) + \frac{a(2)^2}{2} \\ 22.5 &= x_0 + v_0(3) + \frac{a(3)^2}{2} \end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones, se observa que: $x_0 = 0$, $v_0 = 0$ y $a = 5$. En este caso hemos considerado, sin pérdida de generalidad, que el tiempo inicial t_0 es igual a cero. En general, puede ser asignado cualquier valor positivo para t_0 , sin embargo, los valores de las constantes x_0 y v_0 serán diferentes para cada tiempo inicial diferente. Para deducir la ecuación de la parábola utilizando todos los datos de un experimento se utiliza el método de mínimos cuadrados, el cual no será tratado en este trabajo.

Evidentemente la ecuación 2.5 representa una parábola en la que cada término tiene un significado geométrico. La posición x_0 es la longitud que existe entre el eje $y = 0$ y el cruce de la parábola con el eje $t = t_0$. La velocidad inicial v_0 , la aceleración a y el tiempo inicial t_0 , desplazan al vértice de la parábola hacia la derecha o hacia la izquierda del eje vertical, dependiendo del signo que asuma la relación:

$$t_0 - v_0 / a \quad 2.6$$

Si la expresión es positiva, el vértice se desplazará hacia la derecha y se desplazará hacia la izquierda del eje vertical en caso de que la expresión sea negativa. Para el caso particular en que la relación sea igual a cero, el vértice se ubicará sobre el eje vertical. En este caso $t_0 = v_0 / a$.

El vértice se ubicará arriba o abajo del eje horizontal dependiendo del valor que asuma la siguiente relación:

$$x_0 - v_0^2 / 2a \quad 2.7$$

Si es positiva, el vértice se ubicará por arriba del eje horizontal; si es negativa, el vértice se hallará por debajo del mismo y si la relación es igual a cero, el vértice coincidirá con el mismo eje horizontal. En este caso $v_0^2 = 2a x_0$. Observe que el signo que asuma la ecuación 2.7, no depende del valor de t_0 .

La dirección en la que abra la parábola dependerá del signo que asuma el valor de la aceleración. Si la aceleración es positiva, la parábola tendrá su concavidad dirigida hacia arriba. Si es negativa, su concavidad se dirigirá hacia abajo.

De esta forma, al hacer una combinación de las constantes x_0 , v_0 y a , nos podremos dar una idea del tipo de parábola que estemos tratando. Por ejemplo, si al sustituir algunas constantes en la ecuación 2.6 observamos que su valor es negativo, la parábola ubicará su vértice a la izquierda del eje vertical. Si al sustituir las mismas constantes en la ecuación 2.7 observamos que adquiere un valor negativo, el vértice se encontrará por arriba del eje horizontal. Su concavidad se dirigirá hacia arriba, si la aceleración es positiva. El punto de cruce de la parábola y el eje vertical se hallará en $x_0 - v_0 t_0 + a t_0 / 2$ unidades arriba del origen. Observe la figura 2.12.

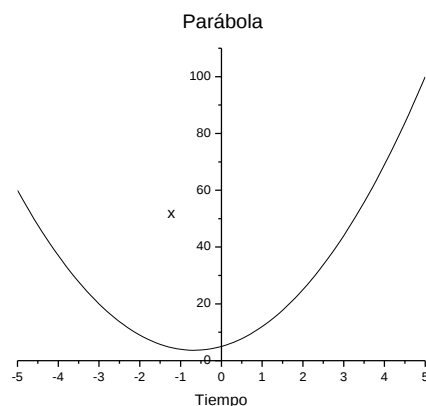


Figura 2.12

La ecuación para esta parábola está dada por: $x = 3t^2 + 4t + 5$. Sustituyendo en la ecuación 2.6 se tiene: $t = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12(5 - x)}}{6}$ cuyo valor es negativo, por lo que el vértice se encontrará a la izquierda del eje de las ordenadas. De igual forma, al sustituir en la ecuación 2.7 los valores de la ecuación de la parábola, se tiene: $t = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12(5 - x)}}{6}$ cuyo valor es positivo, por lo que el vértice se encontrará arriba del eje de las abscisas. Observe que la parábola abre hacia arriba ya que la aceleración es positiva.

Combinando la ecuación 2.4 con la 2.5 obtenemos una ecuación en la que la posición final no dependerá del tiempo, sino de la velocidad fina, de la velocidad inicial, de la aceleración y de la posición inicial, es decir:

$$x = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \quad 2.8$$

Si definimos a la velocidad promedio como la mitad de la suma de la velocidad final más la inicial, se tiene:

$$v = \frac{v + v_0}{2} \quad 2.9$$

Por lo que sustituyendo la ecuación 2.4 en la ecuación 2.8, se concluye que:

$$x = x_0 + \frac{v + v_0}{2} (t - t_0)$$

Finalmente

$$x = x_0 + \frac{v + v_0}{2} (t - t_0)$$

2.10

Ejemplo 2.8

$$x = x_0 + v(t - t_0)$$

Un cuerpo parte del reposo con una aceleración de $8 \frac{m}{s^2}$ a lo largo de una línea recta. Encuentre la velocidad del cuerpo, la velocidad promedio y la distancia recorrida después de 8 segundos de haber iniciado el movimiento.

Solución:

Al cuerpo comienza a moverse desde el reposo, por lo que su velocidad inicial es de cero. Como en el momento de accionar el cronómetro no transcurrió ningún tiempo para que se comenzara a mover el cuerpo, el tiempo inicial también es cero. En consecuencia la velocidad del cuerpo después de 8 segundos es:

$$v = v_0 + a(t - t_0) = 0 + (8 \frac{m}{s^2})(8 s) = 64 \frac{m}{s}$$

La velocidad promedio se calcula dividiendo entre dos la suma de la velocidad final más a velocidad inicial, es decir:

$$v = \frac{v + v_0}{2} = \frac{64 \frac{m}{s} + 0 \frac{m}{s}}{2} = 32 \frac{m}{s}$$

La posición del cuerpo en los primeros 8 segundos es igual a:

$$x = x_0 + v(t - t_0) + \frac{a(t - t_0)^2}{2} = 0 + 0 + (8 \frac{m}{s^2})(8 s - 0)^2 / 2 = 256 m$$

La siguiente gráfica muestra la posición del cuerpo desde el inicio del movimiento hasta el octavo segundo. Observe en la figura que la gráfica corresponde con una parábola en la que depende cuadráticamente del tiempo. Así, si el tiempo aumenta el doble de valor, la distancia que recorra aumentará cuatro veces. Por ejemplo, la distancia que recorra el cuerpo al cuarto segundo es igual a la cuarta parte de lo que recorra al octavo segundo. La gráfica muestra la distancia recorrida por el cuerpo para estos dos instantes.

Ejemplo 2.9

En una posición de 250 m alejado del origen, un cuerpo parte del reposo con una aceleración de -5 m/s^2 a lo largo de una línea recta. Calcule el tiempo, la velocidad final, la velocidad promedio y la distancia cuando el cuerpo pase al origen.

Solución:

El cuerpo comienza a moverse desde el reposo, por lo que su velocidad inicial es cero. Como en el momento de accionar el cronómetro no transcurrió ningún tiempo para que comenzara a mover el cuerpo, el tiempo inicial también es cero. La posición inicial del objeto es de 250 m y se moverá

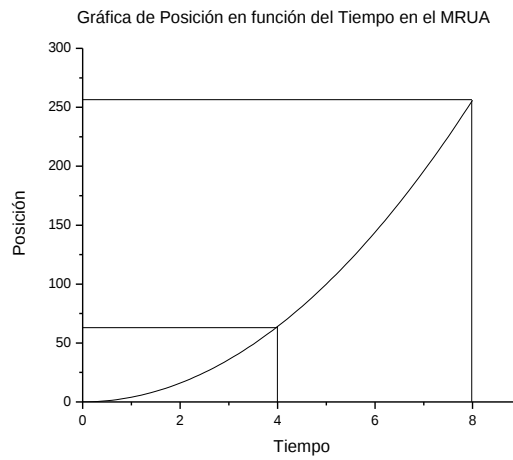


Figura 2.13

en dirección al origen. Es por ello que su aceleración es negativa. En consecuencia, la posición final del cuerpo será igual a cero ya que es su posición en el momento de cruzar el origen. El tiempo se puede calcular haciendo uso de la ecuación 2.5, es decir:

Por lo que el tiempo que tarda el cuerpo en llegar al origen es de:

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2 \Rightarrow 0 = 250\text{ m} + 0 + \frac{-5\text{ m/s}^2}{2} t^2 = 0$$

$$t = \sqrt{\frac{500\text{ m}}{5\text{ m/s}^2}} = \sqrt{100\text{ s}^2} = 10\text{ s}$$

La velocidad del cuerpo al cruzar el origen se calcula utilizando el tiempo que tardó en llegar al origen en la siguiente ecuación:

$$v = v_0 + at = 0 + (-5\text{ m/s}^2)(10\text{ s}) = -50\text{ m/s}$$

Esta velocidad es negativa porque el objeto se desplaza de derecha a izquierda, suponiendo que el movimiento es horizontal. La velocidad promedio se calcula dividiendo entre dos la suma de la velocidad final más la velocidad inicial, es decir:

$$v = \frac{v + v_0}{2} = \frac{-50\text{ m/s} + 0\text{ m/s}}{2} = -25\text{ m/s}$$

La distancia recorrida por el cuerpo es igual a:

La siguiente gráfica muestra la posición del cuerpo desde el inicio del movimiento hasta que llega al origen del sistema de referencia. Como la aceleración es negativa, la parábola abre hacia abajo y cruza el eje vertical justo a los 250 metros del origen. Observe en la gráfica que el cuerpo a seis segundos se encuentra a 160 metros del origen.

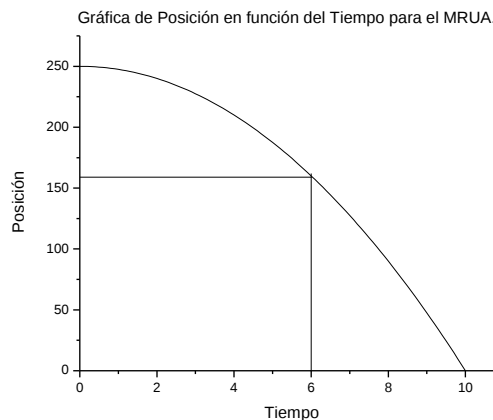


Figura 2.14

Ejemplo 2.10

En una posición de 250 m alejado del origen, un cuerpo parte con una velocidad de 20 m/s y con una aceleración de 5 m/s² a lo largo de una línea recta. Calcule el tiempo que tarda en llegar a los 500 m del origen, la velocidad final, la velocidad promedio y la distancia que recorre el cuerpo al llegar a ese punto.

Solución:

En el momento de accionarse el cronómetro el cuerpo lleva una velocidad de 20 m/s. Como en el momento de accionar el cronómetro no transcurrió ningún tiempo para que comenzara a mover el cuerpo, el tiempo inicial también es cero. La posición inicial del objeto es de 250 m metros y se alejará del origen. Es por ello que su aceleración es positiva. Utilizando la ecuación 2.5, vemos que al sustituir los datos tenemos:

Para calcular el tiempo que tarda en llegar a los 500 metros, debemos reacomodar los términos de la ecuación anterior, es decir:

$$\frac{(5 \text{ m/s}^2)}{2} t^2 + (20 \text{ m/s}) t - 250 \text{ m} = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, se obtiene:

$$t = \frac{20 \frac{m}{s} \pm \sqrt{(20 \frac{m}{s})^2 - 4(2.5 \frac{m}{s^2})(-250 \frac{m}{s^2})}}{2(2.5 \frac{m}{s^2})} = \frac{20 \frac{m}{s} \pm 53.85 \frac{m}{s}}{5 \frac{m}{s^2}}$$

Es decir:

$$t = \frac{20 \frac{m}{s} \pm 53.85 \frac{m}{s}}{5 \frac{m}{s^2}} = \frac{33.85 \frac{m}{s}}{5 \frac{m}{s^2}} = 6.77 \text{ s}$$

Que es el tiempo que tarda el objeto en alcanzar los 500 metros alejado del origen. La velocidad del cuerpo en el momento de llegar por ese punto es:

$$v = v_0 + at = 20 \frac{m}{s} + (5 \frac{m}{s^2})(6.77 \text{ s}) = 53.85 \frac{m}{s}$$

Esta velocidad es positiva porque el objeto se desplaza de izquierda a derecha, suponiendo que el movimiento es horizontal. La velocidad promedio se calcula dividiendo entre dos la suma de la velocidad final más a velocidad inicial, es decir:

$$v = \frac{v + v_0}{2} = \frac{53.85 \frac{m}{s} + 20 \frac{m}{s}}{2} = 36.93 \frac{m}{s}$$

La siguiente gráfica muestra la posición del cuerpo desde el inicio del movimiento hasta que llega a 500 metros alejado del origen. Como la aceleración es positiva, la parábola abre hacia arriba. Observe en la gráfica que el cuerpo a 6.77 segundos se encuentra a 500 metros del origen. La distancia recorrida es de:

Observe que en la gráfica también se muestra que a un tiempo de 3.5 segundos, el objeto se

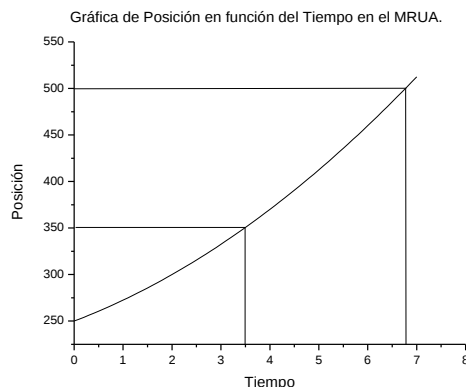


Figura 2.15

haya a 350 metros del origen, aproximadamente. Esto se puede comprobar utilizando la ecuación 2.5, es decir:

Es decir:

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + a(t - t_0)^2/2 = 250 \text{ m} + (20 \text{ m/s})(3.5 \text{ s}) + (5 \text{ m/s}^2)(3.5 \frac{s^2}{2})$$

$$x = 250 \text{ m} + (20 \text{ m/s})(3.5 \text{ s}) + (5 \text{ m/s}^2)(3.5 \text{ s})^2/2 = 350.63 \text{ m}$$

Ejemplo 2.11

Un automóvil A parte de la Cd. de México con una aceleración de $3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ en dirección a la Cd. de Cuernavaca. Simultáneamente otro automóvil B parte de la Cd. de Cuernavaca hacia la Cd. de México, con una aceleración de $4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Si la aceleración de los automóviles se mantiene constante durante todo el viaje y la distancia entre ambas ciudades es de 70 km., encuentre el instante y la posición en que se cruzarán los automóviles. ¿Qué distancia recorrió cada uno de los automóviles antes de cruzarse? Haga una gráfica para comprobar sus resultados.

Solución:

Como la aceleración del automóvil A es de $3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y si suponemos que el origen del sistema de coordenadas se coloca en la Cd. de México, observamos que la posición inicial de este automóvil es de cero. Para el automóvil B la aceleración es de $4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ya que se desplaza en sentido contrario al movimiento del auto A y su posición inicial sería de 70 km, con respecto al mismo sistema de referencia. Así, las ecuaciones para el movimiento de ambos automóviles considerando que $t_0 = 0$, son:

$$x_A = x_{0A} + v_{0A}(t - t_0) + a_A(t - t_0)^2 = (3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \frac{t^2}{2}$$

En el cruce, las posiciones finales de ambos automóviles son iguales. Por lo tanto, ambas ecuaciones se igualarán, es decir:

$$(3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \frac{t^2}{2} = 70\,000 \text{ m} + (-4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \frac{t^2}{2}$$

Despejando el tiempo, se tiene:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 70\,000 \text{ m}}{3 - (-4)}} = \sqrt{\frac{140\,000 \text{ m}}{7}} = 141.42 \text{ s}$$

Que corresponde al instante en que se cruzan los automóviles. La posición de los automóviles se puede encontrar sustituyendo el tiempo en cualquiera de las dos ecuaciones que la calculan:

$$x_A = (3 \text{ m/s}^2) (141.42)^2/2 = 30\,000 \text{ m} = 30 \text{ km}$$

Observe que ambos resultados coinciden y que se encuentran en la misma posición. Las distancias que recorren ambos autos son:

$$Y \quad d_A = |x_A - x_{0A}| = |30 \rightarrow 000 \text{ m} - 0 \text{ m}| = 30\,000 \text{ m} = 30 \text{ km}$$

$$d_B = |x_B - x_{0B}| = |30 \rightarrow 000 \text{ m} - 70\,000 \text{ m}| = 40\,000 \text{ m} = 40 \text{ km}$$

Por medio de una gráfica se puede comprobar estos resultados. Sólo se necesita trazar las parábolas que representan el movimiento de los automóviles. El cruce de ambas curvas corresponde al cruce de los automóviles.

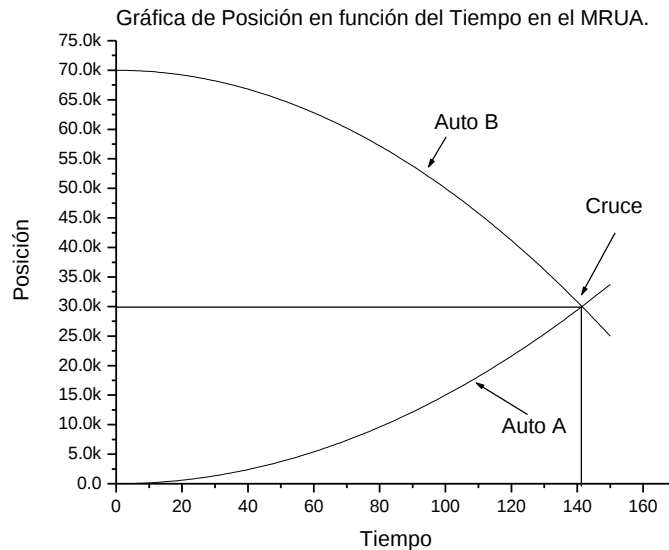


Figura 2.16

Las velocidades de ambos autos en el momento del cruce son:

$$Y \quad v_A = v_{0A} + a_A t = 0 + \left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(141.42 \text{ s}) = 424.26 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_B = v_{0B} + a_B t = 0 + \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(141.42 \text{ s}) = 565.68 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Estos resultados no concuerdan con la realidad ya que son muchos metros los que se recorren en un segundo. De hecho no hay automóviles que puedan recorrer tanta distancia en tan poco tiempo. Este ejemplo sirve para ilustrar la forma como se utilizan las ecuaciones para este tipo de movimientos.

Ejemplo 2.12

Un automóvil A parte de la Cd. de México con una aceleración de $3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ en dirección a la Cd. de Cuernavaca. Después de 30 segundos otro automóvil B parte de la Cd. de Cuernavaca hacia la Cd. de México, con una aceleración de $4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Si la aceleración de los automóviles se mantiene constante durante todo el viaje y la distancia entre ambas ciudades es de 70 km., encuentre el instante y la

posición en que se cruzarán los automóviles. ¿Qué distancia recorrió cada uno de los automóviles antes de cruzarse? Haga una gráfica para comprobar sus resultados.

Solución:

Como la aceleración del automóvil A es de $3 \frac{m}{s^2}$ y suponemos que el origen del sistema de coordenadas se coloca en la Cd. de México, observamos que la posición inicial de este automóvil es de cero. Para el automóvil B la aceleración es de $-4 \frac{m}{s^2}$ ya que se desplaza en sentido contrario al movimiento del auto A y su posición inicial sería de 70 km , con respecto al mismo sistema de referencia. Los tiempos iniciales de ambos automóviles son diferentes debido a que el auto B comienza su movimiento 30 segundos después de iniciado el movimiento del auto A, por lo que el auto B lleva 30 segundos de movimiento menos que el auto A. Así, las ecuaciones para el movimiento de ambos automóviles considerando que $t_0 = 0$, son:

Y

$$x_A = x_{0A} + v_{0A}(t - t_0) + a_A(t - t_0)^2/2 = (3 \frac{m}{s^2}) \frac{t^2}{2}$$

En el cruce, las posiciones finales de ambos automóviles son iguales. Por lo tanto, ambas ecuaciones se igualarán, es decir:

Despejando el tiempo, se tiene:

$$(3 \frac{m}{s^2}) t^2/2 = 70\,000 \text{ m} + (-4 \frac{m}{s^2}) (t - 30 \frac{s}{2})$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado por medio de la fórmula general, se tiene:

$$\frac{(7 \frac{m}{s^2}) t^2}{2} - (120 \frac{m}{s}) t - 68\,200 \text{ m} = 0$$

$$t = \frac{120 \frac{m}{s} \pm \sqrt{(120 \frac{m}{s})^2 - 4(3.5 \frac{m}{s^2})(-68\,200 \text{ m})}}{2(3.5 \frac{m}{s^2})} = \frac{120 \frac{m}{s} \pm 984.48 \frac{m}{s}}{7 \frac{m}{s^2}} = 157.78 \text{ s}$$

Que corresponde al instante en que se cruzan los automóviles. La posición de los automóviles se puede encontrar sustituyendo el tiempo en cualquiera de las dos ecuaciones que la calculan:

De igual forma:

$$x_A = (3 \frac{m}{s^2}) (157.78)^2/2 = 37\,341.79 \text{ m}$$

Observe que ambos resultados no coinciden del todo ya que no se han considerado todos los decimales: sin embargo se puede decir que se encuentran en la misma posición. Las distancias que recorren ambos autos son:

$$d_A = |x_A - x_{0A}| = |37\,341.79 \text{ m} - 0 \text{ m}| = 37\,341.79 \text{ m}$$

Y

Por medio de una gráfica se puede comprobar estos resultados. Sólo se necesita trazar las parábolas que representan el movimiento de los automóviles. El cruce de ambas curvas corresponde al cruce de los automóviles.

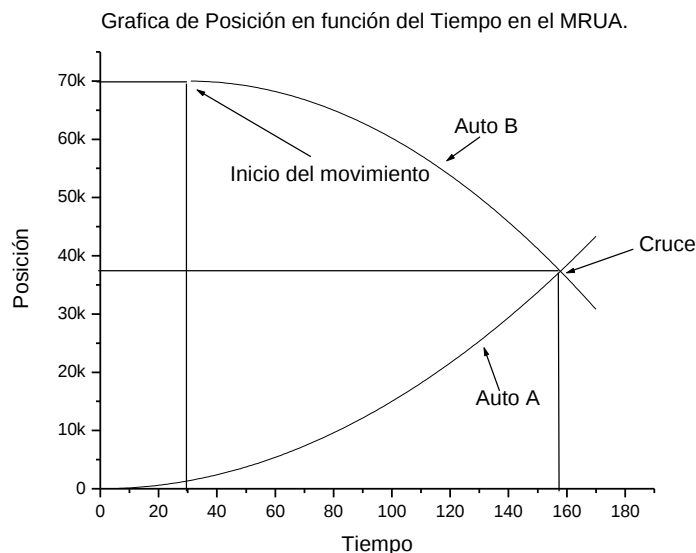


Figura 2.17

Vemos que el tiempo necesario para el cruce es mayor que en anterior caso.

Las velocidades de ambos autos en el momento del cruce son:

Y

$$v_A = v_{0A} + a_A t = 0 + \left(3 \frac{m}{s^2} \right) (157.78 s) = 473.34 \frac{m}{s}$$

Estos resultados no concuerdan con la realidad ya que son muchos metros los que se recorren en un segundo. De hecho no hay automóviles que puedan recorrer tanta distancia en tan poco tiempo. Este ejemplo sirve para ilustrar la forma como se utilizan las ecuaciones para este tipo de movimientos.

2.5 Tiro vertical y caída libre

El tiro vertical y la caída libre es parte del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. La única diferencia consiste en que la aceleración con la que se mueve un cuerpo es con la aceleración de la gravedad y su trayectoria es una línea vertical. De este modo, las ecuaciones para este tipo de movimientos son:

$$y = y_0 + v_0(t - t_0) + g(t - t_0)^2 \quad 2.11$$

$$y = y_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2g} \quad 2.12$$

$$v = v_0 + g(t - t_0) \quad 2.13$$

$$v = \frac{v + v_0}{2} \quad 2.14$$

$$y = y_0 + v(t - t_0) \quad 2.15$$

Por convención vamos a considerar que si el cuerpo sube, la velocidad es positiva y si baja, será negativa. Si el cuerpo se encuentra arriba de la superficie, la posición será positiva y negativa en caso contrario. De esta forma, la aceleración de la gravedad tendrá el valor de $-9.8 \frac{m}{s^2}$. Este valor nos indica que cuando el cuerpo suba, la velocidad descenderá y cuando baje, aumentará. y_0 es la posición y v_0 es la velocidad inicial al instante t_0 , el cual se conoce como tiempo inicial. v es la velocidad promedio del cuerpo al instante t .

Ejemplo 2.13

Se lanza un objeto con una velocidad de $20 \frac{m}{s}$. Calcule el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima y la altura máxima, al igual que el tiempo y la velocidad del cuerpo al momento de llegar al piso.

Solución:

Como el cuerpo se comienza a mover en el momento de accionar el cronómetro, $t_0 = 0$ y la velocidad inicial es de $v_0 = 20 \frac{m}{s}$. Como se lanza el cuerpo desde la superficie de la tierra, $y_0 = 0$ será igual a cero. Si queremos conocer el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima, debemos de considerar que la velocidad final en ese momento es igual a cero. En consecuencia, el tiempo que tarda el objeto en alcanzar la altura máxima es igual a:

$$t = \frac{v - v_0}{g} = \frac{0 - 20 \frac{m}{s}}{-9.8 \frac{m}{s^2}} = 2.04 \frac{s}{1}$$

Con este dato se puede calcular la altura máxima, por medio de la siguiente ecuación:

$$y = y_0 + v_0(t - t_0) + \frac{g(t - t_0)^2}{2} = 0 + (20 \frac{m}{s})(2.04 \frac{s}{1}) + \frac{(-9.8 \frac{m}{s^2})(2.04 \frac{s}{1})^2}{2}$$

Por lo tanto:

El tiempo que tarda en llegar de nuevo al piso se calcula suponiendo que la posición final del cuerpo en el suelo es igual a cero. Al hacer uso de la ecuación 2.5 se tiene:

$$y = 0 + \left(\frac{20m}{s}\right)t + \frac{\left(-9.8 \frac{m}{s^2}\right)t^2}{2} = 0$$

Factorizando, tenemos:

$$\frac{t \left(\frac{20m}{s} + \left(\frac{-9.8 \frac{m}{s^2}}{2} \right) t \right)}{s^2} = 0$$

Es decir:

Despejando, obtenemos:

$$\frac{20m}{s} + \frac{\left(-9.8 \frac{m}{s^2}\right)t}{2} = 0$$

$$t = \frac{40 \frac{m}{s}}{9.8 \frac{m}{s^2}} = 4.08 s$$

Como era de esperarse, este resultado es igual al doble del tiempo empleado para que se alcance la altura máxima.

La velocidad con la que llega al suelo el objeto debe ser igual a la velocidad con la que se lanzó pero con signo negativo debido a que está cayendo el objeto. Esto se puede comprobar utilizando la ecuación 2.4 para calcular la velocidad final, es decir:

$$v = v_0 + gt = 20 \frac{m}{s} - \left(9.8 \frac{m}{s^2}\right)(4.08 s) = 20 \frac{m}{s} - 40 \frac{m}{s} = -20 \frac{m}{s}$$

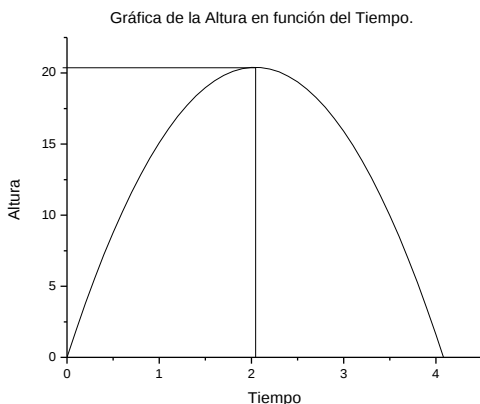


Figura 2.18

Observe en la gráfica que el cuerpo llega a la altura máxima alrededor de segundo segundo, que coincide con los resultados obtenidos anteriormente. De igual forma, la llegada a suelo está alrededor del cuarto segundo. Para el tiro vertical y la caída libre, la parábola siempre abrirá hacia abajo.

Ejemplo 2.14

Desde un edificio de 60 metros se lanza un objeto con una velocidad de $20 \frac{m}{s}$. Calcule el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima y la altura máxima, al igual que el tiempo y la velocidad del cuerpo al momento de llegar al piso.

Solución:

Como el cuerpo se comienza a mover en el momento de accionar el cronómetro, $t_0 = 0$ y la velocidad inicial es de $v_0 = 20 \frac{m}{s}$. Como se lanza el cuerpo desde un edificio de 60 metros, la posición inicial corresponderá a esa altura. Si queremos conocer el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima,

debemos considerar que la velocidad final en ese momento es igual a cero. En consecuencia, el tiempo que tarda el objeto en alcanzar la altura máxima es igual a:

$$t = \frac{v - v_0}{g} = \frac{0 - 20 \frac{m}{s}}{-9.8 \frac{m}{s^2}} = 2.04 \text{ s}$$

Con este dato se puede calcular la altura máxima, por medio de la siguiente ecuación:

Por lo tanto: $y = y_0 + v_0(t - t_0) + \frac{g(t - t_0)^2}{2} = 60 \text{ m} + (20 \text{ m/s})(2.04 \text{ s}) + \frac{(-9.8 \text{ m/s}^2)(2.04 \text{ s})^2}{2}$

El tiempo que tarda en llegar al piso se calcula suponiendo que la posición final del cuerpo en el suelo es igual a cero. Al hacer uso de la ecuación 2.11 se tiene:

Reordenando términos, tenemos: $y = 60 \text{ m} + \left(\frac{20 \text{ m}}{\text{s}}\right)t + \frac{(-9.8 \text{ m/s}^2)t^2}{2} = 0$

La cual es una ecuación de segundo grado que se resuelve empleando la fórmula general, se tiene:

$$t = \frac{20 \frac{m}{s} \pm \sqrt{(20 \frac{m}{s})^2 - 4(-4.9 \frac{m}{s^2})(60 \text{ m})}}{2(-4.9 \frac{m}{s^2})} = \frac{20 \frac{m}{s} \pm 39.69 \frac{m}{s}}{-9.8 \frac{m}{s^2}} = 6.09 \text{ s}$$

Observe que para obtener el resultado se escogió el signo negativo para que el cociente con la gravedad sea positivo.

La velocidad con la que llega al suelo se puede calcular utilizando el tiempo anterior, es decir:

$$v = v_0 + gt = 20 \frac{m}{s} - \left(9.8 \frac{m}{s^2}\right)(6.09 \text{ s}) = 20 \frac{m}{s} - 59.69 \frac{m}{s} = -39.69 \frac{m}{s}$$

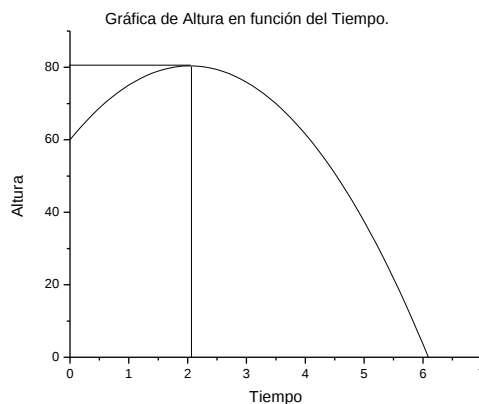


Figura 2.19

Observe en la gráfica que al igual que en el ejemplo anterior, el cuerpo llega a la altura máxima alrededor del segundo segundo, que coincide con los resultados obtenidos anteriormente. El tiempo de llegada al suelo es de cerca de seis segundos, el cual es mayor que en el ejemplo anterior debido a que se lanza desde una altura de 60 metros.

Ejemplo 2.15

Desde un edificio de 60 metros se lanza hacia abajo un objeto con una velocidad de $-20 \frac{m}{s}$. Calcule el tiempo y la velocidad con la que llega al piso.

Solución:

Como el cuerpo se comienza a mover en el momento de accionar el cronómetro, $t_0 = 0$ y la velocidad inicial es de $v_0 = -20 \frac{m}{s}$. La velocidad es negativa debido a que se lanza hacia abajo el objeto. Como se lanza el cuerpo desde un edificio de 60 metros, la posición inicial corresponderá a esa altura. El tiempo que tarda en llegar al piso se calcula suponiendo que la posición final del cuerpo en el suelo es igual a cero. Al hacer uso de la ecuación 2.11 se tiene:

$$y = 60 \text{ m} + \left(-20 \frac{m}{s}\right)t + \frac{(-9.8 \frac{m}{s^2})t^2}{2} = 0$$

Reordenando términos, tenemos:

$$\left(-4.9 \frac{m}{s^2}\right)t^2 + \left(-20 \frac{m}{s}\right)t + 60 \text{ m} = 0$$

La cual es una ecuación de segundo grado que se resuelve empleando la fórmula general, se tiene:

$$t = \frac{20 \frac{m}{s} \pm \sqrt{(20 \frac{m}{s})^2 - 4(-4.9 \frac{m}{s^2})(60 \text{ m})}}{2(-4.9 \frac{m}{s^2})} = \frac{20 \frac{m}{s} \pm 39.69 \frac{m}{s}}{-9.8 \frac{m}{s^2}} = 2.00 \text{ s}$$

Observe que para obtener el resultado se escogió el signo negativo para que el cociente con la gravedad sea positivo.

La velocidad con la que llega al suelo se puede calcular utilizando el tiempo anterior, es decir:

$$v = v_0 + gt = -20 \frac{m}{s} - \left(9.8 \frac{m}{s^2}\right)(2.00 \text{ s}) = -20 \frac{m}{s} - 19.69 \frac{m}{s} = -39.69 \frac{m}{s}$$

Note que este resultado es similar al del ejemplo anterior. En conclusión, la velocidad con la que un cuerpo llega al piso, es la misma si se lanza hacia arriba o hacia abajo, siempre y cuando se lance con la misma velocidad.

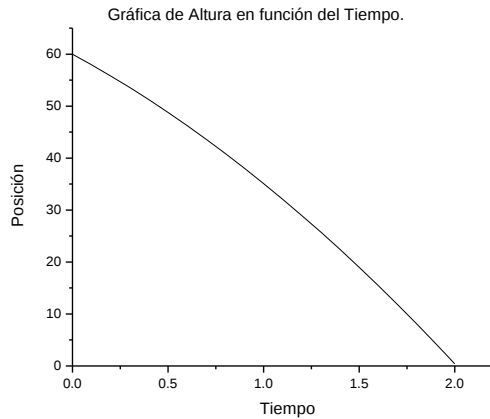


Figura 2.20

2.6 Tiro Parabólico

El movimiento de un cuerpo en una superficie plana es un movimiento en dos dimensiones. Para localizar el cuerpo se requieren, en general, dos coordenadas. Los proyectiles son un ejemplo de movimiento en dos dimensiones. Se llama proyectil a cualquier objeto que es lanzado por algún agente y que continúa en movimiento en virtud de su propia inercia, siguiendo una trayectoria determinada por la fuerza gravitacional que actúa sobre él. Una bola disparada por un cañón, una piedra lanzada al aire o una pelota que cae por el borde de una mesa, son casos particulares de proyectiles.

El camino seguido por un proyectil se denomina trayectoria. Los proyectiles describen trayectorias curvilíneas, las cuales pueden descomponerse en una componente horizontal y en otra vertical. En la dirección horizontal el proyectil se mueve con velocidad constante, recorriendo distancias iguales en iguales intervalos de tiempo. No hay aceleración en la dirección horizontal del movimiento. En cambio, en la dirección vertical, la velocidad sufre cambios, es decir, por la presencia de la gravedad de la tierra, el objeto experimenta una aceleración en la dirección vertical.

Es interesante mencionar que la componente horizontal del movimiento de un proyectil es totalmente independiente de la componente vertical. Cada una de ellas actúa de manera independiente. Sus efectos combinados producen toda la gama de trayectorias curvas que describen los proyectiles. Por ello, la trayectoria de un proyectil se puede analizar considerando por separado su componente horizontal y vertical.

La trayectoria que describe un proyectil que sólo se acelera en la dirección vertical, moviéndose con velocidad horizontal constante, se llama parábola. Cuando no es posible despreciar la resistencia del aire, las trayectorias no son parabólicas. Supondremos que podemos ignorar el efecto que produce el aire en estos movimientos.

En el tiro parabólico la velocidad en la dirección horizontal de la trayectoria seguida por el proyectil, es constante, por lo que el movimiento en esta dirección puede ser descrito completamente por las

ecuaciones correspondientes al Movimiento Rectilíneo Uniforme. Para la posición horizontal del proyectil, se tiene:

$$x = x_0 + v_x(t - t_0) \quad 2.16$$

donde: x_0 es la posición horizontal del cuerpo al instante t_0 , a esta posición se le conoce con el nombre de posición horizontal inicial; x es la posición horizontal del cuerpo al instante t y se le conoce como posición horizontal final; v_x es la velocidad del proyectil en la dirección horizontal, la cuál se considera constante.

Asimismo, la velocidad del cuerpo en la dirección horizontal, está dada por la siguiente ecuación:

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 \quad 2.17$$

donde: v_0 y θ_0 son la rapidez y el ángulo inicial con el que es disparado el proyectil, respectivamente. De igual forma, en la dirección vertical, el movimiento del proyectil es con aceleración constante por lo que su posición y velocidad pueden ser descritas a través de las ecuaciones correspondientes al Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado. Las ecuaciones para la posición vertical son:

$$y = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + g(t - \frac{t_0}{2})^2 \quad 2.18$$

$$y = y_0 + \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2g} \quad 2.19$$

$$y = y_0 + \frac{(v_y + v_{0y})(t - t_0)}{2} \quad 2.20$$

donde: y_0 es la posición vertical del cuerpo al instante t_0 o al comienzo del movimiento, a esta posición se le conoce con el nombre de posición vertical inicial; y es la posición vertical del proyectil al instante t y se le conoce con el nombre de posición vertical final; v_{0y} es la velocidad vertical del objeto al comienzo del movimiento o al instante t_0 y se le conoce como velocidad vertical inicial; v_y es la velocidad vertical del proyectil al instante t y se le conoce como velocidad vertical final.

La velocidad vertical inicial está dada por la siguiente relación:

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0 \quad 2.21$$

donde: v_0 y θ_0 son la rapidez y el ángulo inicial con el que es disparado el proyectil, respectivamente.

La velocidad vertical final puede ser calculada por medio de la ecuación:

$$v_y = v \sin \theta \quad 2.22$$

donde: v y θ son la rapidez y el ángulo con el que se desplaza el proyectil al instante t . De igual forma esta velocidad está expresada en función del tiempo a través de la siguiente igualdad:

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 + g(t - t_0) \quad 2.23$$

Por medio de esta ecuación podremos calcular la velocidad del proyectil en la dirección vertical con sólo conocer el tiempo de vuelo, al igual que la rapidez y ángulo inicial.

La rapidez v_0 del proyectil al instante t_0 o rapidez inicial es igual a la magnitud de la velocidad inicial, es decir:

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_{0y}^2} \quad 2.24$$

y el ángulo θ_0 que forma la velocidad inicial con la horizontal en dicho instante está dado por:

$$\tan \theta_0 = \frac{v_{0y}}{v_x} \quad 2.25$$

La rapidez v del proyectil al instante t o rapidez final es igual a la magnitud del vector velocidad, es decir:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad 2.26$$

y el ángulo θ que forma el vector velocidad con la horizontal en dicho instante está dado por:

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} \quad 2.27$$

El vector velocidad es tangente a la trayectoria de la partícula en todos sus puntos.

Las ecuaciones 2.16, 2.17, 2.21 y 2.18 determinan a x y a y en función del parámetro común $(t - t_0)$ que es el tiempo de vuelo. Combinándolas y eliminando a $(t - t_0)$, obtenemos:

$$y = y_0 + (\tan \theta_0)(x - x_0) + \frac{g}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} (x - x_0)^2 \quad 2.28$$

que relaciona a y con x , siendo la ecuación de la trayectoria del proyectil.

Como x_0 , y_0 , θ_0 , v_0 y g son constantes, la ecuación anterior corresponde a la ecuación de una parábola. En consecuencia, la trayectoria de un proyectil es parabólica. Es prudente aclarar que en todo el desarrollo, hemos considerado que el valor de la aceleración de la gravedad es igual a $g = -9.8 \frac{m}{s^2}$. El signo negativo nos indica que el movimiento del proyectil hacia arriba es desacelerado y hacia abajo es acelerado. Bajo estas circunstancias, toda parábola que describe el movimiento de un proyectil, tendrá su concavidad dirigida hacia abajo.

La ecuación 2.28 nos indica que un proyectil puede ser lanzado con la misma rapidez inicial pero con ángulos diferentes. La velocidad vertical inicial es mayor para un ángulo de lanzamiento mayor y viceversa. El hecho de que la componente vertical de la velocidad inicial sea mayor, se traduce en una trayectoria más elevada. En este caso, los proyectiles alcanzan mayores alturas. Por supuesto, cuando el ángulo es menor, el objeto permanece en vuelo durante menor tiempo.

De igual forma, esta ecuación nos indica que un proyectil puede ser lanzado con el mismo ángulo inicial a diferentes rapidezces. En esta situación, las velocidades iniciales, tanto horizontal como vertical, serán mayores conforme aumente el valor de la rapidez inicial. En consecuencia, la altura y el alcance logrado por el proyectil también aumentarán.

Si el origen del sistema de coordenadas se fija en el sitio en el que se dispara el proyectil, los valores de x_0 y y_0 serían iguales a cero, coincidiendo el origen del sistema de coordenadas en el punto donde el proyectil se dispara. En esta situación, la ecuación 2.28 se simplifica a:

$$y = (\tan \theta_0)x + \frac{g}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} x^2 \quad 2.29$$

Si la resistencia del aire es lo bastante pequeña para que podamos despreciarla, el proyectil alcanzará su máxima altura en un tiempo igual a:

$$t_0 \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \quad \text{max} \quad 2.30$$

donde t_{max} es el tiempo que tarda el proyectil en alcanzar la altura máxima. La velocidad del proyectil en la dirección vertical es cero cuando alcanza la altura máxima. En consecuencia, la rapidez del proyectil a esa altura será mínima. El proyectil regresará a la misma altura empleando el doble de tiempo. Esto se debe a que la desaceleración debida a la gravedad cuando el proyectil va hacia arriba, es igual a la aceleración producida por la gravedad cuando va hacia abajo. La rapidez que pierde al subir es, por tanto, igual a la rapidez que adquiere al bajar, de modo que el proyectil llega al mismo nivel con la misma rapidez.

La altura máxima alcanzada por el proyectil se calcula por medio de la siguiente expresión:

$$y_0 \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} \quad \text{max} \quad 2.31$$

El máximo valor de y_{max} es cuando el proyectil se lanza verticalmente ya que $\theta_0 = 90^\circ$, $\sin \theta_0 = 1$ y $y_0^2_{max}$. Si se lanza horizontalmente, $\theta_0 = 0^\circ$ y la altura máxima sería igual a y_0 .

Como la componente horizontal de la velocidad del proyectil permanece constante durante todo el vuelo, la distancia horizontal alcanzada, es decir el alcance, es igual al producto de esta velocidad por el tiempo que tarda el proyectil en llegar a la misma altura a la que fue lanzado, es decir:

$$R = |x - x_0| = \left| -\frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0 \right| \quad 2.32$$

Al valor de R se le conoce como alcance. Notamos que el alcance es máximo cuando $\theta_0 = 45^\circ$, ya que el máximo valor que puede tener el seno de un ángulo es 1, cuando el ángulo es de 90 grados. Puesto que $\sin 2\theta_0 = \sin(180^\circ - 2\theta'_0)$, se concluye de la ecuación 2.32 que existen dos valores diferentes de los ángulos iniciales para los cuales se obtiene el mismo alcance. La relación entre ambos ángulos está dada en la siguiente igualdad:

$$\theta_0 + \theta'_0 = 90^\circ \quad 2.33$$

Esta última relación nos indica que un proyectil tendrá el mismo alcance bajo la misma rapidez inicial cuando la suma de los ángulos de disparo sea igual a 90 grados. Por ejemplo, un objeto lanzado a un ángulo de 30 grados tiene el mismo alcance que un objeto lanzado con la misma rapidez inicial, pero a un ángulo de 60 grados. Como se mencionó, el alcance es máximo cuando el proyectil es lanzado a 45 grados de inclinación. Así, para ángulos menores a 45 grados, un proyectil tendrá mayor alcance conforme el ángulo de disparo aumente. Para ángulos mayores a los 45 grados, el alcance disminuirá conforme el ángulo de disparo aumente.

Para que un proyectil logre que la altura máxima alcanzada sea igual a su alcance, el ángulo de disparo o inicial debe ser igual a 76 grados aproximadamente, es decir: $\theta_0 \cong 76^\circ$.

Por otra parte, si el ángulo θ_0 está por debajo de la horizontal como, por ejemplo, en el movimiento de una pelota después de abandonar un plano inclinado, se aplican las mismas ecuaciones, con la diferencia de que el ángulo de partida o inicial es negativo. En esta situación, la componente horizontal de la velocidad permanece inalterada e igual a $v_0 \cos \theta_0$. El movimiento vertical es similar al de un cuerpo lanzado hacia abajo con una componente vertical de la velocidad dada por $v_0 \sin \theta_0$, que es ahora una cantidad negativa.

Finalmente, la rapidez final es igual a:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad 2.34$$

Que corresponde con la magnitud del vector velocidad, conocida como rapidez.

Ejemplo 2.16

Un proyectil es lanzado con una rapidez inicial de $v_0 = 40 \frac{m}{s}$, formando un ángulo de $\theta_0 = 60^\circ$. Calcule:

a) El tiempo que tarda en llegar a la altura máxima, b) La altura máxima, El tiempo que tarda en llegar al suelo, d) La rapidez con la que llega al suelo y d) El alcance. Haga una gráfica que represente la trayectoria del proyectil y una gráfica de la posición vertical y horizontal en función del tiempo.

Solución:

Las velocidades iniciales tanto horizontal como vertical se calculan por medio de las siguientes ecuaciones:

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = \left(40 \frac{m}{s}\right) \cos 60^\circ = \left(40 \frac{m}{s}\right) * (0.5) = 20 \frac{m}{s}$$

Y

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0 = \left(40 \frac{m}{s}\right) \sin 60^\circ = \left(40 \frac{m}{s}\right) * (0.8660) = 34.64 \frac{m}{s}$$

Para conocer el tiempo que tarda en llegar el proyectil a la altura máxima se debe suponer que la velocidad final vertical es igual a cero, es decir $v_y = 0$. En consecuencia:

$$t = \frac{v_y - v_{0y}}{g} = \frac{0 - 34.64 \frac{m}{s}}{-9.8 \frac{m}{s^2}} = 3.534 \text{ s}$$

Para calcular la altura máxima se utiliza el tiempo utilizado para alcanzarla por medio de la siguiente ecuación:

$$y_{m\acute{a}x} = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + g(t - t_0)^2/2 = 0 + (34.64 \text{ m/s})(3.534 \text{ s}) + (-9.8 \text{ m/s}^2)(3.534 \frac{s}{2})^2$$

Es decir:

$$y_{m\acute{a}x} = 122.42 \text{ m} - 61.2 \text{ m} = 61.2 \text{ m}$$

Que corresponde con la altura máxima que alcanza el proyectil.

La distancia recorrida en el momento de alcanzar la altura máxima es igual a:

$$x = x_0 + v_x t = 0 + \left(20 \frac{m}{s}\right)(3.534 \text{ s}) = 70.68 \text{ m}$$

Para conocer el tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo, es necesario suponer que la posición vertical final del cuerpo en el suelo es cero. Con esta suposición, utilizaremos la ecuación siguiente:

$$y = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + g(t - t_0)^2/2 = 0 + (34.64 \text{ m/s}) t + (-9.8 \text{ m/s}^2) t^2/2 = 0$$

Sacando factor común:

$$t \left(34.64 \frac{\text{m}}{\text{s}} + \left(-9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \frac{t}{2} \right) = 0$$

Por lo que

$$t = \frac{-2 * 34.64}{-9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{-69.28 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{-9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 7.07 \text{ s}$$

Que corresponde al tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo.

Para calcular la velocidad vertical con la que llega el proyectil al suelo, debemos utilizar el tiempo que hemos calculado anteriormente, en la siguiente ecuación:

$$v_y = v_{0y} + g t = 34.64 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * 7.07 \text{ s} = 34.64 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 69.28 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -34.64 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

En consecuencia, la rapidez final es igual a:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(20 \text{ m/s})^2 + (-34.64 \text{ m/s})^2} = \sqrt{400 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + 1199.93 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Observe que es la misma rapidez con la que fue lanzado.

El ángulo con el que llega al suelo se puede calcular por medio de la siguiente ecuación:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-34.64 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{20 \frac{\text{m}}{\text{s}}}\right) = -60^\circ$$

Observe también que este ángulo corresponde al ángulo con que fue lanzado. Este resultado es válido cuando el proyectil se encuentra a la misma altura a la que fue lanzado, es decir, si la altura es diferente, la velocidad y el ángulo será diferente al ángulo y velocidad al que fue lanzado. A iguales alturas, iguales velocidades y ángulos.

El alcance logrado por el proyectil es igual al producto de la velocidad horizontal por el tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo, es decir:

$$R = x - x_0 = v_x t = 20 \text{ m/s} * (7.07 \text{ s}) = 141.4 \text{ m}$$

La gráfica siguiente muestra la trayectoria del proyectil. Observe en la gráfica que el alcance y la altura máxima corresponde con los valores obtenidos teóricamente. De igual forma se observa que la distancia recorrida por el proyectil al alcanzar la altura máxima es igual a la mitad del alcance.

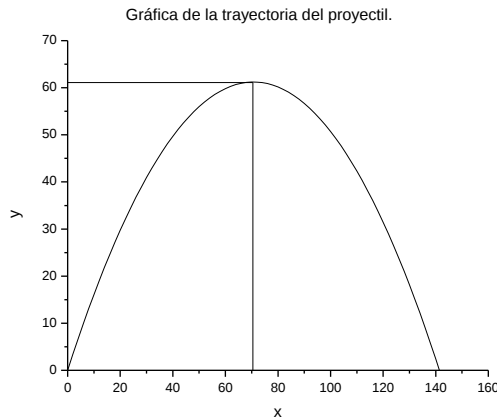


Figura 2.21

Ejemplo 2.17

Un proyectil es lanzado con una rapidez inicial de $v_0 = 40 \frac{m}{s}$, formando un ángulo de $\theta_0 = 30^\circ$. Calcule:

a) El tiempo que tarda en llegar a la altura máxima, b) La altura máxima, El tiempo que tarda en llegar al suelo, c) La rapidez con la que llega al suelo y d) El alcance. Haga una gráfica que represente la trayectoria del proyectil y una gráfica de la posición vertical y horizontal en función del tiempo.

Solución:

La velocidad inicial horizontal y vertical se calculan por medio de las siguientes ecuaciones:

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = \left(40 \frac{m}{s}\right) \cos 30^\circ = \left(40 \frac{m}{s}\right) * (0.8660) = 34.64 \frac{m}{s}$$

Y

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0 = \left(40 \frac{m}{s}\right) \sin 30^\circ = \left(40 \frac{m}{s}\right) * (0.5) = 20 \frac{m}{s}$$

Para conocer el tiempo que tarda en llegar el proyectil a la altura máxima se debe suponer que la velocidad final vertical es igual a cero, es decir $v_y = 0$. En consecuencia:

$$t = \frac{v_y - v_{0y}}{g} = \frac{0 - 20 \frac{m}{s}}{-9.8 \frac{m}{s^2}} = 2.04 s$$

Para calcular la altura máxima se utiliza el tiempo utilizado para alcanzarla por medio de la siguiente ecuación:

$$y_{m\acute{a}x} = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + g(t - t_0)^2/2 = 0 + (20 m/s)(2.04 s) + (-9.8 m/s^2)(2.04 \frac{s}{2})^2$$

Es decir:

$$y_{m\acute{a}x} = 40.81 m - 20.40 m = 20.41m$$

Que corresponde con la altura máxima que alcanza el proyectil.

La distancia recorrida en el momento de alcanzar la altura máxima es igual a:

$$d = |x - x_0| = v_x t = \left| \left(34.64 \frac{m}{s}\right) (2.04 s) \right| = 70.68 m$$

Para conocer el tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo, es necesario suponer que la posición vertical final del cuerpo en el suelo es cero. Con esta suposición, utilizaremos la ecuación siguiente:

$$y = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + g(t - t_0)^2/2 = 0 + (20 \text{ m/s}) t + (-9.8 \text{ m/s}^2) t^2/2 = 0$$

Sacando factor común:

$$t \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}} + \left(-9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \frac{t}{2} \right) = 0$$

Por lo que:

$$t = \frac{-40 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{-9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 4.08 \text{ s}$$

Que corresponde al tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo. Que en este caso es igual al doble del tiempo requerido para alcanzar la altura máxima.

Para calcular la velocidad vertical con la que llega el proyectil al suelo, debemos utilizar el tiempo que hemos calculado anteriormente y sustituirlo en la siguiente ecuación:

$$v_y = v_{0y} + g t = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * 4.08 \text{ s} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 40 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

En consecuencia, la rapidez final es igual a:

$$v = \pm \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \pm \sqrt{(34.64 \text{ m/s})^2 + (-20 \text{ m/s})^2}$$

O

$$v = \pm \sqrt{400 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + 1199.93 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Observe que es la misma velocidad con la que fue lanzado.

El ángulo con el que llega al suelo se puede calcular por medio de la siguiente ecuación:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-20 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{34.64 \frac{\text{m}}{\text{s}}}\right) = -30^\circ$$

Observe también que este ángulo corresponde al ángulo con que fue lanzado. Este resultado es válido cuando el proyectil se encuentra a la misma altura a la que fue lanzado, es decir, si la altura es diferente, la velocidad y el ángulo será diferente al ángulo y velocidad al que fue lanzado. A iguales alturas, iguales velocidades y ángulos.

El alcance logrado por el proyectil es igual al producto de la velocidad horizontal por el tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo, es decir:

$$R = x - x_0 = v_x t = \left(34.64 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) * (4.08 \text{ s}) = 141.33 \text{ m}$$

Este alcance es idéntico al alcance logrado al lanzar el proyectil con un ángulo inicial de 60 grados. Este resultado muestra que dos proyectiles logran el mismo alcance cuando sus ángulos de lanzamiento cumplen la condición de que la suma de estos ángulos es igual a 90 grados.

La gráfica siguiente muestra las trayectorias de los proyectiles. Observe en la gráfica que el alcance es el mismo. De igual forma se observa que la distancia recorrida por el proyectil al alcanzar la altura máxima es igual a la mitad del alcance. Debemos aclarar que el proyectil que es lanzado con menor ángulo logra el alcance máximo en menor tiempo que el que es lanzado con mayor ángulo. Esto quiere decir que cuando llegue al suelo el proyectil que es lanzado con mayor ángulo, el otro proyectil ya se encuentra en ese lugar. La diferencia entre uno y otro proyectil es la altura máxima alcanzada. Dependiendo de lo que se busque al lanzar un proyectil, es el ángulo con el que se lance. Esta situación es ideal debido a que no se considera el viento, el cual puede afectar la trayectoria del proyectil. No se tiene por objetivo considerar este factor por lo que la solución a este tipo de problemas no es parte de este apunte. Reiteramos que la condición para que se logre el mismo alcance, es que la suma de los ángulos de disparo debe ser igual a 90 grados. Si la suma no coincide, los alcances serán diferentes.

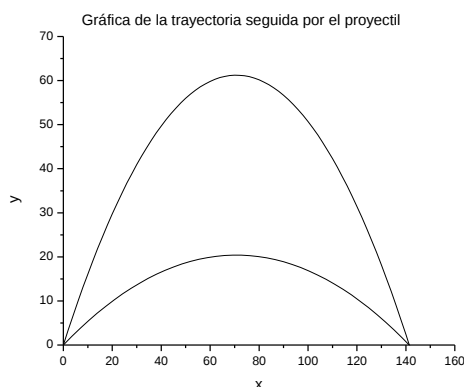


Figura 2.22

Ejemplo 2.18

Desde un edificio de 50 metros de altura, un proyectil es lanzado con una rapidez inicial de $v_0 = 40 \frac{m}{s}$, formando un ángulo de $\theta_0 = 60^\circ$. Calcule: a) El tiempo que tarda en llegar a la altura máxima, b) La altura máxima, c) El tiempo que tarda en llegar al suelo, d) La velocidad con la que llega al suelo y d) El alcance. Haga una gráfica que represente la trayectoria del proyectil y una gráfica de la posición vertical y horizontal en función del tiempo.

Solución:

La velocidad inicial horizontal y vertical se calculan por medio de las siguientes ecuaciones:

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = \left(40 \frac{m}{s}\right) \cos 60^\circ = \left(40 \frac{m}{s}\right) * (0.5) = 20 \frac{m}{s}$$

Y

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0 = \left(40 \frac{m}{s}\right) \sin 60^\circ = \left(40 \frac{m}{s}\right) * (0.8660) = 34.64 \frac{m}{s}$$

Para conocer el tiempo que tarda en llegar el proyectil a la altura máxima se debe suponer que la velocidad final vertical es igual a cero, es decir $v_0 = 0$ y además se debe suponer que la altura inicial del proyectil es de 50 metros. En consecuencia:

$$t = \frac{v_y - v_{0y}}{g} = \frac{0 - 34.64 \frac{m}{s}}{-9.8 \frac{m}{s^2}} = 3.534 s$$

Para calcular la altura máxima se utiliza el tiempo utilizado para alcanzarla por medio de la siguiente ecuación:

$$y_{m\acute{a}x} = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + g(t - t_0)^2/2 = 50 m + (34.64 m/s)(3.534 s) + (-9.8 m/s^2)(3.534 \frac{s}{2})^2$$

$$y_{m\acute{a}x} = 122.42 m - 61.2 m = 111.2 m$$

Que corresponde con la altura máxima que alcanza el proyectil.

La distancia recorrida en el momento de alcanzar la altura máxima es igual a:

$$d = |x - x_0| = |v_x t| = \left| \left(20 \frac{m}{s} \right) (3.534 s) \right| = 70.68 m$$

Para conocer el tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo, es necesario suponer que la posición vertical final del cuerpo en el suelo es cero. Con esta suposición, utilizaremos la ecuación siguiente:

$$y = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + g(t - t_0)^2/2 = 50 m + (34.64 m/s) t + (-9.8 m/s^2) t^2/2 = 0$$

Reordenando términos:

$$\left(-4.9 \frac{m}{s^2} \right) t^2 + \left(34.63 \frac{m}{s} \right) t + 50 m = 0$$

Por lo que esta ecuación se resuelve con la fórmula general:

$$t = \frac{-34.64 \frac{m}{s} \pm \sqrt{(34.64 m/s)^2 - 4 * (-4.9 m/s^2) * (50 m)}}{2 * \left(-4.9 \frac{m}{s^2} \right)} = \frac{-34.64 \frac{m}{s} \pm 46.69 \frac{m}{s}}{-9.8 \frac{m}{s^2}}$$

Es decir:

$$t = \frac{-34.64 \frac{m}{s} - 46.69 \frac{m}{s}}{-9.8 \frac{m}{s^2}} = \frac{-81.33 \frac{m}{s}}{-9.8 \frac{m}{s^2}} = 8.298 s$$

Que corresponde al tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo.

Para calcular la velocidad vertical final con la que llega el proyectil al suelo, debemos utilizar el tiempo que hemos calculado anteriormente, en la siguiente ecuación:

$$v_y = v_{0y} + g t = 34.64 \frac{m}{s} - 9.8 \frac{m}{s^2} * 8.298 s = 34.64 \frac{m}{s} - 81.33 \frac{m}{s} = -46.69 \frac{m}{s}$$

En consecuencia, la rapidez final es igual a:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(20 m/s)^2 + (-46.69 m/s)^2} = \sqrt{400 \frac{m^2}{s^2} + 2179.96 \frac{m^2}{s^2}} = 50.79 \frac{m}{s}$$

Se tomó el signo negativo porque el cuerpo cae. Observe que es la misma velocidad con la que fue lanzado.

El ángulo con el que llega al suelo se puede calcular por medio de la siguiente ecuación:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-46.69 \frac{m}{s}}{20 \frac{m}{s}}\right) = -68.07^\circ$$

El alcance logrado por el proyectil es igual al producto de la velocidad horizontal por el tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo, es decir:

$$R = |x - x_0| = |v_x t| = \left| \left(20 \frac{m}{s} \right) * (8.298 s) \right| = 165.95 m$$

La gráfica siguiente muestra la trayectoria del proyectil. Observe en la gráfica que el alcance y la altura máxima corresponde con los valores obtenidos teóricamente.

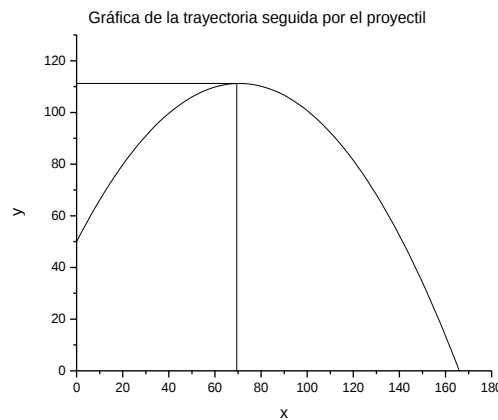


Figura 2.23

Ejemplo 2.19

Desde un edificio de 50 metros de altura, un proyectil es lanzado hacia abajo con una velocidad inicial de $v_0 = 40 \frac{m}{s}$, formando un ángulo de $\theta_0 = -60^\circ$. Calcule: a) El tiempo que tarda en llegar al suelo, b) La velocidad con la que llega al suelo y c) El alcance. Haga una gráfica que represente la trayectoria del proyectil.

Solución:

Como el proyectil es lanzado hacia abajo, el ángulo de disparo se considera negativo. La velocidad inicial horizontal y vertical se calculan por medio de las siguientes ecuaciones:

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = \left(40 \frac{m}{s} \right) \cos (-60^\circ) = \left(40 \frac{m}{s} \right) * (0.5) = 20 \frac{m}{s}$$

Y

$$v_{0y} = v_0 \sin \theta_0 = \left(40 \frac{m}{s} \right) \sin (-60^\circ) = \left(40 \frac{m}{s} \right) * (-0.8660) = -34.64 \frac{m}{s}$$

Para conocer el tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo, es necesario suponer que la posición vertical final del cuerpo en el suelo es cero. Con esta suposición, utilizaremos la ecuación siguiente:

$$y = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + g(t - t_0)^2/2 = 50 \text{ m} + (34.64 \text{ m/s}) t + (-9.8 \text{ m/s}^2) t^2/2 = 0$$

Reordenando términos:

$$\left(-4.9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) t^2 + \left(-34.64 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) t + 50 \text{ m} = 0$$

Por lo que esta ecuación se resuelve con la fórmula general:

$$t = \frac{-\left(-34.64 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \pm \sqrt{\left(-34.64 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - 4 * \left(-4.9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) * (50 \text{ m})}}{2 * \left(-4.9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}$$

Es decir:

$$t = \frac{34.64 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 46.69 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{-9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{-12.05 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{-9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1.229 \text{ s}$$

Que corresponde al tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo.

Para calcular la velocidad vertical final con la que llega el proyectil al suelo, debemos utilizar el tiempo que hemos calculado anteriormente, sustituyéndolo en la siguiente ecuación:

$$v_y = v_{0y} + g t = -34.64 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} * 1.229 \text{ s} = -34.64 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 12.05 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -46.69 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

En consecuencia, la rapidez final es igual a:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(20 \text{ m/s})^2 + (-46.69 \text{ m/s})^2} = \sqrt{400 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + 2179.96 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 50.79 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Observe que es la misma rapidez con la que llega el cuerpo si es lanzado hacia arriba con la misma velocidad y ángulo de disparo. El ángulo con el que llega al suelo se puede calcular por medio de la siguiente ecuación:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-46.69 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{20 \frac{\text{m}}{\text{s}}}\right) = -66.81^\circ$$

El alcance logrado por el proyectil es igual al producto de la velocidad horizontal por el tiempo que tarda el proyectil en llegar al suelo, es decir:

$$R = |x - x_0| = |v_x t| = \left|\left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) * (1.229 \text{ s})\right| = 24.58 \text{ m}$$

La gráfica siguiente muestra la trayectoria del proyectil. Observe en la gráfica que el alcance y la altura máxima corresponde con los valores obtenidos teóricamente.

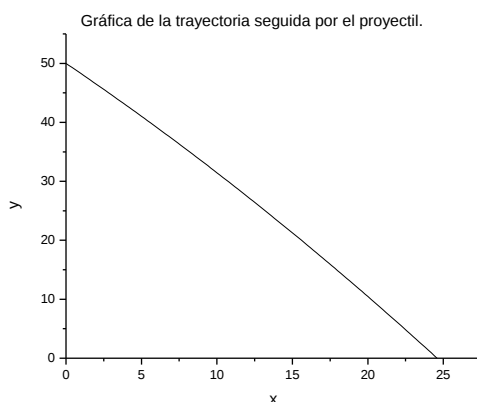


Figura 2.24

2.7 Preguntas y problemas

Preguntas

1. Establezca el concepto de movimiento.
2. ¿Cuál es la diferencia entre posición y distancia?
3. Establezca el concepto de velocidad.
4. ¿Cuál es la diferencia entre velocidad y rapidez?
5. Establezca el concepto de aceleración.
6. ¿Cómo es la gráfica de la posición en función del tiempo en el movimiento rectilíneo uniforme?
7. ¿Cómo es la gráfica de la velocidad en función del tiempo en el movimiento rectilíneo uniforme?
8. ¿Cómo es la gráfica de la posición en función del tiempo en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado?
9. ¿Cómo es la gráfica de la velocidad en función del tiempo en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado?
10. ¿Cómo es la gráfica de la aceleración en función del tiempo en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado?
11. ¿Cuáles son las unidades con las que se expresa a la aceleración?
12. Establezca todas las ecuaciones que describen el movimiento rectilíneo uniforme.
13. Establezca todas las ecuaciones que describen el movimiento rectilíneo uniformemente variado.
14. Establezca todas las ecuaciones que describen el tiro parabólico.
15. ¿Qué registra el velocímetro de un automóvil, la velocidad o la rapidez?
16. ¿Cuál es el valor de la aceleración de la gravedad?
17. Si dejamos soltar dos cuerpos de diferente masa desde una determinada altura, ¿cuál de los dos caerá más rápido?

Problemas

- 1.- Dada la ecuación $x = 30 \text{ m} + \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) t$ Haga la gráfica de posición en función del tiempo.

2.- Dados los siguientes datos, grafique y obtenga la ecuación que describe la posición en función del tiempo. De igual forma indique la posición inicial y la velocidad.

TIEMPO (SEGUNDOS)	POSICIÓN (METROS)
0	50
1	65
2	80
3	95
4	110
5	125
6	140
7	155

Sol. $x = 50 \text{ m} + \left(15 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) t$

3.- Un cuerpo se mueve con velocidad constante de 20 km/h, después de haber partido de una posición de -3 km alejado del origen. ¿Qué posición tendrá después de 5.5 horas? ¿Qué distancia recorrió? Elabore una tabla donde se muestre la posición del cuerpo para cada hora de recorrido y en base a la tabla conteste las preguntas.

Sol. $x = 107 \text{ km}$ y $d = 110 \text{ km}$

4.- A los 50 segundos de haber partido, un automóvil se encuentra en una posición de 600 m. Si la velocidad que lleva es de 20 km/h. ¿Cuál es la posición inicial del auto?

Sol. $x_0 = 322.22 \text{ m}$

5.- Un automóvil originalmente tiene una posición de 20 km alejado del origen y después de dos horas se halla a 40 km. ¿Cuál es la velocidad del auto?

Sol. $v = 2.78 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

6.- Dos trenes entran simultáneamente por un túnel de dos kilómetros de largo. Si ambos se mueven por la misma vía y uno de ellos lleva una velocidad de 20 m/s y el otro de -15 m/h, ¿cuánto tiempo tardarán en chocar? ¿En qué posición se efectuará el choque? ¿Qué distancia recorrerá cada tren antes de chocar? Elabore una tabla donde se muestre la posición de los cuerpos para cada segundo de recorrido y en base a la tabla conteste las preguntas planteadas. Corrobore sus respuestas gráficamente.

Sol. $t = 57.14 \text{ s}$, $x = 1142.86 \text{ m}$, $d_a = 1142.86 \text{ m}$ y $d_b = 857.15 \text{ m}$.

7.- Desde una ciudad A parte un automóvil con velocidad constante de 20 km/h hacia una ciudad B, alejada 100 km. Si después de dos horas de que partió el auto de la ciudad A, parte otro automóvil de la ciudad B con una velocidad de 10 km/h en la misma dirección, ¿qué tiempo debe transcurrir para que se lleve a cabo el alcance? ¿En qué lugar se efectúa el alcance? ¿Qué distancia recorrerá cada

uno de los automóviles? Elabore una tabla donde se muestre la posición de los automóviles para cada hora de recorrido y en base a la tabla conteste las preguntas planteadas. Corrobore sus respuestas gráficamente.

Sol. $t_a = 8 \text{ h}$, $t_b = 6 \text{ h}$, $x = 160 \text{ km}$, $d_a = 160 \text{ km}$ y $d_b = 60 \text{ km}$.

8.- Grafique la ecuación $x = 15 \text{ m} - \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)t - \left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)t^2$ en el plano cartesiano y diga cuáles son los valores de x_0 , v_0 y a .

9.- Complete la siguiente tabla en base a los datos que se incluyen en ella.

TIEMPO (segundos)	VELOCIDAD (m/s)	VELOCIDAD PROMEDIO (m/s)	$d \vec{v}$ $= d_0 + \bar{v}t$	d $= d_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}$	d $= d_0 + (v^2 - v_0^2)/2a$
0	10	-----			
1	17	13.5			
2	24	17			
3	31	20.5			
4	38				
5	45				
6	52				
7	59				

10.- Si una persona deja caer un balón desde lo alto de un edificio y observa que tarda 3 segundos en llegar al suelo. ¿Qué altura tendrá el edificio?

Sol. $h = 44.1 \text{ m}$

11.- Una persona lanza hacia abajo un objeto desde un edificio de 70 metros, con una velocidad de -20 m/s. ¿Cuál es el tiempo que tarda el objeto en llegar al suelo? Calcule la velocidad con la que llega al suelo. Elabore una tabla donde se muestre la posición del cuerpo para cada segundo de recorrido y en base a la tabla conteste las preguntas planteadas.

Sol. $t = 2.25 \text{ s}$ y $v = -42.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

12.- Si el cuerpo del problema anterior es lanzado hacia arriba, calcule: a).- El tiempo que tarda en llegar a la altura máxima. b).- La altura máxima. c).- El tiempo que tarda en llegar al suelo. d).- La velocidad con la que llega al suelo. e).- El tiempo que tarda en volver a pasar por el punto donde fue lanzado. f).- La velocidad con la que pasará por el punto donde fue lanzado. Elabore una tabla donde se muestre la posición del cuerpo para cada segundo de recorrido y en base a la tabla conteste las preguntas planteadas.

Sol. a).- t_{max} , b).- h_{max} , c).- $t_{suelo} = 6.34 \text{ s}$, d).- $v_{suelo} = -42.1 \frac{m}{s}$, e).- $t = 4.08 \text{ s}$ y f).- $v = -20.0 \frac{m}{s}$.

13.- Para saber la profundidad que tiene un pozo, una persona deja caer una piedra y toma el tiempo que tarda en escuchar el sonido producido por el choque de la piedra con el fondo. Si este tiempo es de 4.5 segundos, calcule profundidad del pozo.

Sol. $h = 99.23 \text{ m}$

14.- Un proyectil es lanzado con una velocidad inicial de $v_0 = 60 \frac{m}{s}$, formando un ángulo de $\theta_0 = 50^\circ$. Calcule: a) El tiempo que tarda en llegar a la altura máxima, b) La altura máxima, c) El tiempo que tarda en llegar al suelo, d) La rapidez con la que llega al suelo y e) El alcance. Haga una gráfica que represente la trayectoria del proyectil y una gráfica de la posición vertical y horizontal en función del tiempo.

Sol. a).- t_{max} , b).- $y_{max} = 107.67 \text{ m}$, c).- $t_{suelo} = 9.37 \text{ s}$, d).- $v = 60.0 \frac{m}{s}$, e).- $x = 361.40 \text{ m}$.

15.- Un proyectil es lanzado con una rapidez inicial de $v_0 = 60 \frac{m}{s}$, formando un ángulo de $\theta_0 = 40^\circ$. Calcule: a) El tiempo que tarda en llegar a la altura máxima, b) La altura máxima, c) El tiempo que tarda en llegar al suelo, d) La rapidez con la que llega al suelo y e) El alcance. Haga una gráfica que represente la trayectoria del proyectil y una gráfica de la posición vertical y horizontal en función del tiempo.

Sol. a).- t_{max} , b).- $y_{max} = 75.81 \text{ m}$, c).- $t_{suelo} = 7.86 \text{ s}$, d).- $v = 60.0 \frac{m}{s}$, e).- $x = 361.40 \text{ m}$.

16.- Desde un edificio de 50 metros de altura, un proyectil es lanzado con una rapidez inicial de $v_0 = 60 \frac{m}{s}$, formando un ángulo de $\theta_0 = 50^\circ$. Calcule: a) El tiempo que tarda en llegar a la altura máxima, b) La altura máxima, c) El tiempo que tarda en llegar al suelo, d) La rapidez con la que llega al suelo y e) El alcance. Haga una gráfica que represente la trayectoria del proyectil y una gráfica de la posición vertical y horizontal en función del tiempo.

Sol. a).- t_{max} , b).- $y_{max} = 157.67 \text{ m}$, c).- $t_{suelo} = 10.35 \text{ s}$, d).- $v = 67.68 \frac{m}{s}$, e).- $x = 399.36 \text{ m}$.

17.- Desde un edificio de 50 metros de altura, un proyectil es lanzado hacia abajo con una velocidad inicial de $v_0 = 60 \frac{m}{s}$, formando un ángulo de $\theta_0 = -50^\circ$. Calcule: a) El tiempo que tarda en llegar al suelo, b) La rapidez con la que llega al suelo y c) El alcance. Haga una gráfica que represente la trayectoria del proyectil.

Sol. a).- $t_{suelo} = 0.98 \text{ s}$, b).- $v = 67.68 \frac{m}{s}$ y c).- $x = 37.97 \text{ m}$.

18.- desde un edificio de 100 metros de altura, se lanza una pelota desde lo alto de un edificio hasta otro edificio, localizado a una distancia de 50 metros. La rapidez inicial de la pelota es de $v_0 = 20 \frac{m}{s}$, con una inclinación de $\theta_0 = 40^\circ$ sobre la horizontal. ¿A qué altura golpeará la pelota sobre el otro edificio?

Sol. $y = 89.71 \text{ m}$.

19.- Encuentre el ángulo con el que se debe disparar un proyectil con una rapidez de salida de $v_0 = 120 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y alcanzar un blanco localizado en el mismo nivel pero a una distancia de 1300 metros.

Sol. $\theta_0 = 31.10^\circ$

20.- Un proyectil es disparado horizontalmente desde un cañón situado a 44 m por encima de un plano horizontal y con una rapidez inicial de 240 m/s. a).- ¿Cuánto tiempo permanecerá el proyectil en el aire? b).- ¿A qué distancia horizontal chocará contra el suelo? c).- ¿Cuál es la magnitud de la componente vertical de su rapidez al llegar al suelo?

Sol. a).- $t = 3.0 \text{ s}$, $x = 718.82 \text{ m}$ y c).- $v_y = -29.38 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

3 DINÁMICA

3.1 Concepto de Dinámica

La Dinámica es la ciencia que estudia la causa del movimiento de los cuerpos. El movimiento de un cuerpo queda determinado por la naturaleza y la disposición de los otros cuerpos que forman su medio ambiente. La fuerza es la influencia del medio ambiente sobre un cuerpo y la masa es la oposición de un cuerpo a ser acelerado cuando una fuerza actúa sobre él, lo que constituye una propiedad que se suele llamar inercia. La inercia es la tendencia que todo cuerpo posee de mantener su estado. Así, si un cuerpo está en reposo tiene una tendencia a continuar en este estado y será necesario que actúe sobre él una fuerza para cambiar dicho estado. Si el cuerpo se está moviendo tiende por inercia a moverse en línea recta y con una velocidad constante. Isaac Newton formuló tres leyes fundamentales para explicar las causas del movimiento de los cuerpos. Estas leyes fueron establecidas por medio de idealizaciones y abstracciones propias de los procesos científicos en la descripción de la naturaleza.

3.2 Inercia

El concepto de inercia está íntimamente relacionado con la primera ley de Newton. Una definición común de este término es la siguiente: la inercia mide la tendencia de un objeto en reposo a permanecer en reposo y de un objeto en movimiento a permanecer en movimiento con su velocidad original.

Es bien sabido que un camión de carga tiene mucho mayor inercia que una carretilla, es mucho más fácil mover la carretilla que mover el camión, además, se puede detener con mayor facilidad la carretilla que el camión cuando ambos se mueven con la misma velocidad. Es difícil alterar el estado de movimiento de un objeto cuya inercia es grande. La masa de un objeto está relacionada con su inercia, que es la oposición al cambio del estado de movimiento. Cuanto mayor sea la inercia de un objeto tanto más difícil podrá acelerarse. Se mide la inercia en términos de una cantidad fundamental llamada masa, cuya unidad estándar es el kilogramo.

3.3 Primera Ley de Newton

La fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo que se encuentra estático es cero. Se puede resumir este comportamiento de la siguiente manera: un objeto en reposo permanecerá en reposo si actúa sobre él una fuerza resultante igual a cero. Esta afirmación es una parte de la primera ley de Newton. Antes de Newton, casi todos suponían que era necesaria una fuerza para mantener un objeto en movimiento. Si se desliza un objeto sobre una superficie horizontal, pronto se detendrá. Para mantenerlo en movimiento, se deberá continuar empujándolo. En efecto, es casi obvio que los objetos en movimiento, abandonados a sí mismos, se frenan y pronto se detienen. Newton descubrió que esta observación, aunque correcta, no se aplica a objetos sobre los que actúa una fuerza resultante igual a cero. Para el caso del objeto que se desliza sobre la superficie horizontal, descubrió que existe una fuerza que frena al movimiento que es la fuerza de fricción que la superficie ejerce sobre el bloque. Por lo tanto, la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo no es cero. Newton reconoció que el bloque disminuye su velocidad y se detiene a causa de la fuerza de fricción no equilibrada. Mientras más pequeña sea una fuerza de fricción, el cuerpo disminuirá su velocidad más lentamente. Siguiendo esta línea de razonamiento, Newton propuso que si están ausentes las fuerzas de fricción, los objetos que se deslizan no se detendrán. Es decir: si la fuerza resultante que actúa sobre un objeto en movimiento es cero, el objeto continuará su movimiento con velocidad constante. Esta ley afirma que ni la magnitud ni la dirección de la velocidad del objeto cambiarán. El objeto continuará moviéndose a lo largo de una

línea recta. Se puede resumir la primera ley del movimiento de Newton como sigue: si la suma vectorial de las fuerzas externas que actúan sobre un objeto es cero, la velocidad del objeto permanecerá constante.

Cuando un cuerpo está en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme decimos que está en equilibrio. Entonces es evidente que si queremos tener un cuerpo en equilibrio debemos hacer que la resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo sea nula. Recíprocamente, si tenemos una partícula en equilibrio podemos afirmar que las fuerzas actuantes tienen magnitudes y direcciones que su suma sea nula.

3.4 Aplicaciones de la Primera Ley de Newton

Cuando una cuerda está estirada por la acción de esfuerzos aplicados en sus extremidades se dice que está en tensión o tracción. El valor de la tensión en la cuerda, representa el valor de la fuerza que la estira o del esfuerzo que hace para sostener algún peso. En la figura 3.1, la cuerda OA tira del punto O hacia la izquierda y esta fuerza se representa por la tensión T_1 en la figura. En esta misma figura mostramos la tensión T_2 ejercida por OB sobre O. Por otra parte, actúa en O el peso de 50 N hacia abajo. Como el cuerpo está en equilibrio, concluimos que la resultante de las fuerzas que actúan sobre él es nula. En consecuencia, la suma de las fuerzas en la dirección horizontal y vertical son iguales a cero, es decir:

$$\sum F_x = 0 \text{ y } \sum F_y = 0$$

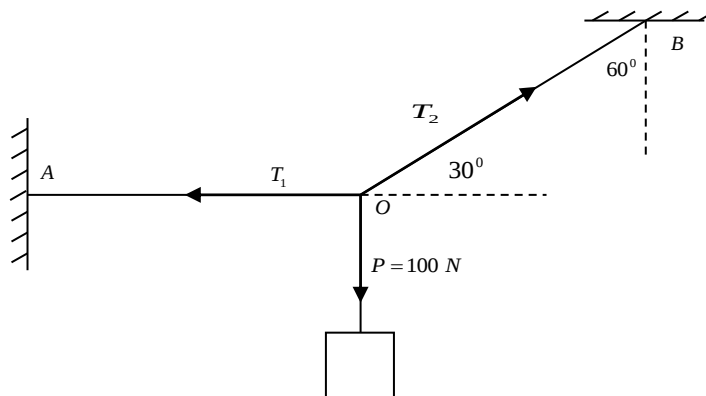


Figura 3.1

Descomponiendo las fuerzas O_x y O_y obtenemos las dos ecuaciones siguientes:

$$T_2 \cos 30^\circ - T_1 = 0$$

Y

$$T_2 \sin 30^\circ - 100 \text{ N} = 0$$

Observe que la primera ecuación nos muestra que la fuerza T_1 tira del punto O hacia la izquierda la cual es equilibrada por la componente T_2 en dirección O_x . La segunda ecuación nos muestra que es la componente $T_2 \sin 30^\circ$ la que está equilibrando el peso del cuerpo.

Al resolver el sistema de ecuaciones, encontramos que los dos valores de las dos incógnitas:

$$T_1 = 173.2 \text{ N y } T_2 = 200 \text{ N}$$

Encuentre la tensión en las cuerdas en la figura 3.2 que se muestra a continuación. En la figura se muestran las componentes de las tensiones en las cuerdas.

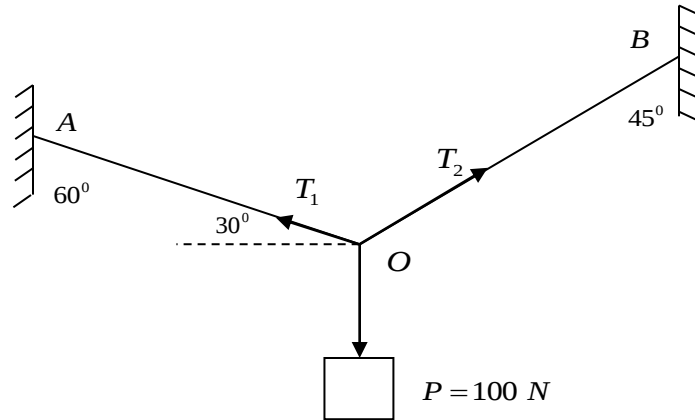


Figura 3.2

Descomponiendo las fuerzas O_x y O_y obtenemos las dos ecuaciones siguientes:

$$-T_1 \cos 30^\circ + T_2 \cos 45^\circ = 0$$

Y

$$T_1 \sin 30^\circ + T_2 \sin 45^\circ - 100 \text{ N} = 0$$

Observe que la primera ecuación nos muestra que la componente T_1 en la dirección horizontal tira del punto O hacia la izquierda la cual es equilibrada por la componente T_2 en la misma dirección la cual tira del punto O hacia la derecha. La segunda ecuación nos muestra que las componentes verticales de las tensiones T_1 y T_2 equilibran el peso del bloque. Al resolver el sistema de ecuaciones, encontramos que los valores de las dos incógnitas son:

$$T_1 = 73.20 \text{ N} \text{ y } T_2 = 89.66 \text{ N}$$

Encuentre la tensión en la cuerda en la figura 3.3 que se muestra a continuación. En la figura se muestran las fuerzas que actúan sobre el bloque.

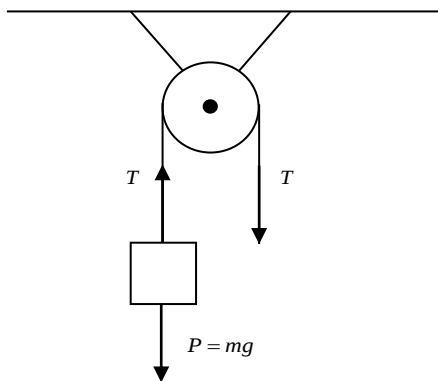


Figura 3.3

Si se desprecia la masa de la polea y la fricción de la misma con el eje, entonces la tensión en los extremos de la cuerda es la misma. Si el cuerpo permanece en reposo, la tensión menos el peso es igual a cero, es decir, la fuerza que se necesita aplicar en el extremo de la cuerda es igual al peso del cuerpo.

Encuentre la tensión en la cuerda en la figura 3.4. En la figura se muestran dos poleas, una fija y la otra móvil. La polea móvil está sujeta por una cuerda en la cual uno de sus extremos se encuentra fijo a la superficie horizontal y el otro extremo pasa por la polea fija. La cuerda en la polea móvil divide el peso del bloque en dos. En consecuencia, se tiene:

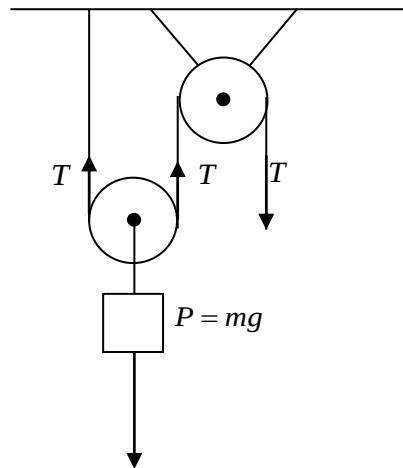


Figura 3.4

$$T + T = 2T = mg$$

Por lo que:

$$T = \frac{mg}{2} \quad 3.1$$

Esta relación nos indica que la tensión en la cuerda es igual a la mitad del peso del bloque. Este dispositivo sirve para reducir la fuerza que se necesita para levantar un objeto.

Encuentre la tensión en la cuerda en la figura 3.5. En la figura se muestran cuatro poleas, una fija y tres móviles. Dos de las poleas móviles están sujetas por una cuerda en la cual uno de sus extremos se encuentra fijo a la superficie horizontal y el otro extremo pasa por otra polea móvil. Uno de los extremos de la cuerda de la tercera polea móvil está fijo a la superficie horizontal y el otro extremo pasa por la polea fija. La cuerda en la primera polea móvil divide el peso del bloque en dos. La tensión en el extremo de la primera polea es dividida por las dos cuerdas de la segunda polea móvil. Finalmente, la cuerda que pasa por la tercera polea divide la tensión de la cuerda que pasa por la segunda polea. En consecuencia, se tiene que:

$$T_3 + T_3 = 2T_3 = mg$$

$$T_2 + T_2 = 2T_2 = T_3$$

$$T_1 + T_1 = 2T_1 = T_2$$

En consecuencia:

$$T_1 = \frac{mg}{8} \quad 3.2$$

La fuerza T_1 es la octava parte del peso del bloque para poder equilibrarlo.

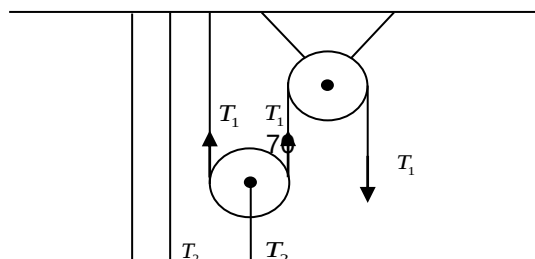


Figura 3.5

3.5 Segunda Ley de Newton

La segunda ley de Newton estudia el efecto que tienen las fuerzas no equilibradas que actúan sobre un objeto. La experiencia cotidiana dice que las fuerzas no equilibradas producen un cambio en la velocidad del objeto, es decir, producen una aceleración sobre el objeto. Newton reconoció que las fuerzas no equilibradas causan aceleraciones y su segunda ley relaciona la fuerza externa resultante que actúa sobre un objeto con la aceleración del objeto.

Cuando una fuerza neta actúa sobre un objeto de masa m y produce una aceleración a , las cantidades están relacionadas por:

$$F = m a \quad 3.3$$

Esta conclusión es el enunciado de la segunda ley de Newton.

La segunda ley de Newton nos indica que cuanto mayor sea la masa del objeto tanto mayor será la fuerza necesaria para cambiar su velocidad. Además, cuanto mayor sea la fuerza neta actuando sobre un objeto, tanto mayor será la aceleración experimentada. En consecuencia con la segunda ley de Newton, si la fuerza neta que actúa sobre un objeto es igual a cero, un objeto en reposo permanecerá en reposo y un objeto en movimiento conservará su velocidad original.

3.6 Aplicaciones de la Segunda Ley de Newton

Las leyes de Newton forman parte esencial de los conceptos básicos de la Dinámica, que es la ciencia que se encarga de establecer las causas del movimiento de los cuerpos. La fuerza representa la interacción del medio y el objeto en estudio, identificándose como la causa que origina el movimiento de los cuerpos.

Newton estableció que en ausencia de fuerzas un cuerpo no alterará su estado, es decir, si está en reposo, permanecerá en reposo. Aunque escape a nuestro sentido común, lo mismo se puede afirmar de un cuerpo que se mueva con velocidad constante y describiendo una trayectoria rectilínea; éste permanecerá así mientras no haya una fuerza que altere su estado.

Para un cuerpo que haya sido afectado por una fuerza, ese estado se romperá apareciendo con ello un cambio de rapidez o un cambio en la trayectoria del movimiento del cuerpo si originalmente se desplazaba con movimiento rectilíneo uniforme, o pueden aparecer ambos efectos simultáneamente. Un cambio experimentado en la rapidez de un cuerpo en un determinado intervalo de tiempo, es conocido como aceleración tangencial. De manera equivalente, un cambio en la dirección del movimiento del cuerpo causa una aceleración conocida como aceleración centrípeta. Así, una fuerza que actúe en un cuerpo es capaz de ocasionar en él una aceleración que es proporcional a dicha fuerza.

Sin embargo, la aceleración que experimente un cuerpo no solo dependerá de la fuerza que se le aplica, sino también de la cantidad de masa que contenga; entendiéndose a la masa como una medida cuantitativa de la inercia, siendo ésta una propiedad que tienen los cuerpos de presentar resistencia para cambiar su estado. Así, para una fuerza dada, un objeto de menor masa se acelerará más que un objeto de mayor masa.

La segunda ley de Newton establece que la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es igual al producto de la masa del cuerpo por la aceleración que experimente. En consecuencia, para identificar las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, se dibuja un diagrama por separado del cuerpo aislado, mostrando un marco de referencia y todas las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo. Este diagrama se le conoce como Diagrama de Cuerpo Libre.

3.6.1 Máquina de Atwood

Este método es utilizado para calcular la tensión en la cuerda y la aceleración que experimentarán dos objetos de diferente masa que estén atados a la cuerda que pasa por una polea sin fricción y masa despreciable. Dicho dispositivo se conoce como Máquina de Atwood. La figura 3.6 muestra un dispositivo similar a la Máquina de Atwood.

En este ejemplo se antepondrá un signo positivo a la aceleración si el cuerpo se desplaza hacia arriba y un signo negativo en caso contrario. Las fuerzas que actúan sobre m_1 y m_2 se muestran en la figura 3.6 en la cual T representa la tensión en los extremos de la cuerda.

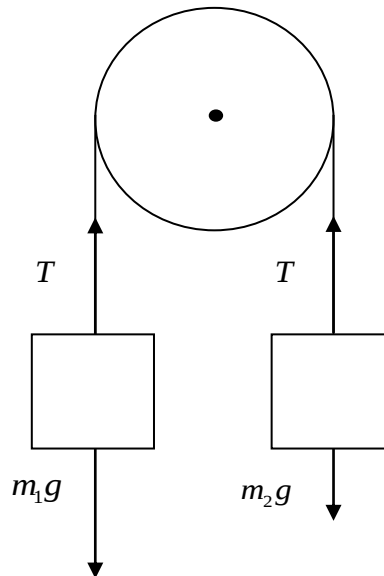


Figura 3.6

La ecuación de las fuerzas para m_1 es:

$$T - m_1g = -m_1a \quad 3.4$$

Y para m_2 se tiene:

$$T - m_2g = m_2a \quad 3.5$$

Con m_1 mayor a m_2 .

Estas ecuaciones nos indican que la tensión es menor que el peso del cuerpo de masa m_1 y que la tensión es mayor que el peso del cuerpo de masa m_2 ; en consecuencia, el bloque de masa m_1 caerá y el bloque de masa m_2 , subirá.

Combinando ambas ecuaciones, tenemos:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2} \quad 3.6$$

y

$$T = \frac{2m_1m_2g}{m_1+m_2} \quad 3.7$$

Estos resultados son válidos si la masa de la polea es despreciable. Para el caso en que esta condición no se cumpla, encontraríamos que la tensión en cada extremo de la cuerda sería diferente.

Ejemplo 3.1

En una máquina de Atwood las masas de los bloques son de $m_1 = 20 \text{ kg}$ y $m_2 = 10 \text{ kg}$, encuentre la aceleración con la que se moverán los bloques y la tensión en la cuerda.

Solución:

Sustituyendo las masas en la ecuación 3.6 y 3.7 para la aceleración y la tensión, tenemos:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2} = \frac{(20 \text{ kg} - 10 \text{ kg}) * 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{20 \text{ kg} + 10 \text{ kg}} = \frac{98 \text{ N}}{30 \text{ kg}} = 3.26 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Y

$$T = \frac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2} = \frac{2 * 20 \text{ kg} * 10 \text{ kg} * 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{20 \text{ kg} + 10 \text{ kg}} = \frac{3920 \text{ kg N}}{30 \text{ kg}} = 130.6 \text{ N}$$

Ejemplo 3.2

En una máquina de Atwood la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y la tensión en la cuerda es de $T = 50 \text{ N}$, calcule las masas de los bloques.

Solución:

Utilizando la ecuación 3.4, tenemos:

$$T - m_1g = -m_1a$$

Despejando m_1 se llega a:

$$m_1 = \frac{T}{g-a} = \frac{50 \text{ N}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 10.42 \text{ kg}$$

Utilizando la ecuación 3.5, tenemos:

$$T - m_2g = m_2a$$

Despejando m_2 se llega a:

$$m_2 = \frac{T}{g+a} = \frac{50 \text{ N}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 3.38 \text{ kg}$$

Ejemplo 3.

En una máquina de Atwood la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y la masa más grande es de $m_1 = 30 \text{ kg}$, calcule la masa del bloque restante y la tensión en la cuerda.

Utilizando la ecuación 3.4, despejamos la tensión:

$$T = m_1(g - a) = \left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) * \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 22.8 \text{ N}$$

Y sustituyendo la tensión en la ecuación 3.5, la masa del bloque restante es:

$$m_2 = \frac{g-a}{g+a} m_1 = \frac{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} * 30 \text{ kg} = 7.22 \text{ kg}$$

Ejemplo 3.4

En una máquina de Atwood la tensión en la cuerda es de $T = 40 \text{ N}$ y la masa del bloque mayor es de $m_1 = 20 \text{ kg}$, calcule la aceleración con la que se moverán los bloques y la masa del bloque restante.

Solución:

Utilizando la ecuación 3.4 despejamos la aceleración:

$$a = \frac{m_1 g - T}{m_1} = \frac{20 \text{ kg} * 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 40 \text{ N}}{20 \text{ kg}} = 7.8 \text{ kg}$$

Sustituyendo la aceleración en la ecuación 3.5 y despejando m_2 , se llega al siguiente resultado:

$$m_2 = \frac{T}{g + a} = \frac{40 \text{ N}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2.53 \text{ kg}$$

Ejemplo 3.5

En una máquina de Atwood la tensión en la cuerda es de $T = 40 \text{ N}$ y la masa del bloque menor es de $m_2 = 3 \text{ kg}$, calcule la aceleración con la que se moverán los bloques y la masa del bloque restante.

Solución:

Utilizando la ecuación 3.5 despejamos la aceleración:

$$a = \frac{T - m_2 g}{m_2} = \frac{40 \text{ kg} - 3 \text{ kg} * 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{3 \text{ kg}} = 3.53 \text{ kg}$$

Sustituyendo la aceleración en la ecuación 4 y despejando m_1 , se tiene:

$$m_1 = \frac{T}{g - a} = \frac{40 \text{ N}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 3.53 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 6.38 \text{ kg}$$

Ejemplo 3.6

En una máquina de Atwood la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y la masa del bloque menor es de $m_2 = 3 \text{ kg}$, calcule la tensión en la cuerda y la masa del bloque restante.

Solución:

Utilizando la ecuación 3.5 despejamos la tensión:

$$T = m_2(g + a) = \left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) * \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 53.4 \text{ N}$$

Sustituyendo la tensión en la ecuación 3.4 y despejando m_1 , se tiene:

$$m_1 = \frac{T}{g - a} = \frac{53.4 \text{ N}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 29.6 \text{ kg}$$

3.6.2 Plano horizontal

En la figura 3.7 se muestra un bloque sobre un plano horizontal atado a una cuerda que sujeta a otro bloque que se encuentra suspendido. Quisiéramos saber ¿Qué fuerzas actúan en cada bloque?, ¿Qué tan grande debe ser la fuerza horizontal que tira del bloque m_1 para que se mueva?, ¿Cuál debe ser el valor de la masa del bloque m_2 para que se pueda mover el bloque m_1 si no existe fricción entre las superficies de contacto? y, finalmente, ¿Con qué aceleración se moverán los bloques?

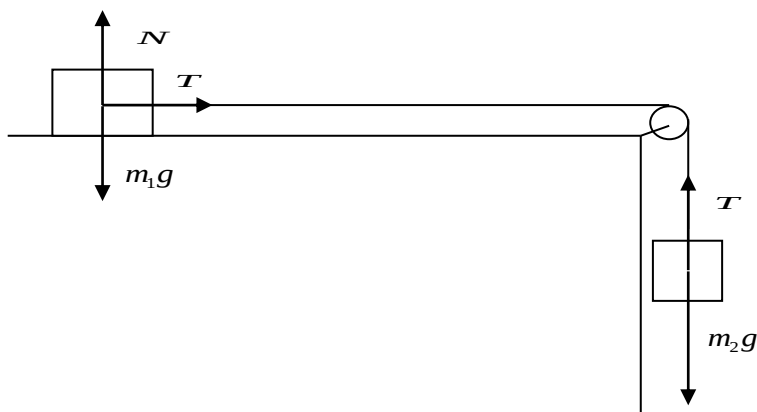


Figura 3.7

Las fuerzas que actúan sobre m_1 y m_2 se muestran en la figura 3.7, en la cual T representa la tensión en los extremos de la cuerda.

En consecuencia, la ecuación de las fuerzas que actúan sobre m_1 es:

$$T = m_1 a \quad 3.8$$

y

$$N - m_1 g = 0 \quad 3.9$$

Para m_2 se tiene:

$$T - m_2 g = -m_2 a \quad 3.10$$

Combinando ambas ecuaciones, tenemos que:

$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} \quad 3.11$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} \quad 3.12$$

Ejemplo 3.7

En un arreglo como el que se muestra en la figura 3.7, la masa del bloque que se encuentra sobre el plano es de $m_1 = 20 \text{ kg}$ y la que se encuentra suspendida es de $m_2 = 1 \text{ kg}$. Encuentre la aceleración con la que se moverán los bloques y la tensión en la cuerda.

Solución:

Utilizando la ecuación 3.11, encontramos que la aceleración con la que se moverán los bloques es de:

$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{1 \text{ kg}}{20 \text{ kg} + 1 \text{ kg}} * 9.8 \hat{=} \frac{m}{s^2} = 0.467 \frac{m}{s^2}$$

Al sustituir estas masas en la ecuación 3.12, se concluye que la tensión en la cuerda es de:

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{(20 \text{ kg})(1 \text{ kg})}{20 \text{ kg} + 1 \text{ kg}} * 9.8 \frac{m}{s^2} = 9.33 \text{ N}$$

Ejemplo 3.8

En un arreglo como el que se muestra en la figura 3.7, la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 6 \frac{m}{s^2}$ y la masa del bloque que se encuentra sobre el plano horizontal es de $m_1 = 20 \text{ kg}$.

Encuentre la masa del bloque restante y la tensión en la cuerda.

Solución:

Utilizando la ecuación 3.8, encontramos que la tensión en la cuerda es de:

$$T = m_1 a = (20 \text{ kg}) \left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 120 \text{ N}$$

Empleando la ecuación 3.10 y despejando m_2 , concluimos que:

$$m_2 = \frac{T}{g - a} = \frac{120 \text{ N}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 31.58 \text{ kg}$$

Ejemplo 3.9

En un arreglo como el que se muestra en la figura 3.7, la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y la masa del bloque que se encuentra suspendida es de $m_2 = 20 \text{ kg}$. Encuentre la masa del bloque restante y la tensión en la cuerda.

Solución:

Empleando la ecuación 3.10, y despejando la tensión encontramos que:

$$T = (g - a) m_2 = \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) * 20 \text{ kg} = 76 \text{ N}$$

Utilizando la ecuación 3.9 y despejando m_1 , concluimos que:

$$m_1 = \frac{T}{a} = \frac{76 \text{ N}}{6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 12.66 \text{ Kg}$$

Ejemplo 3.10

En un arreglo como el que se muestra en la figura 3.7, la tensión en la cuerda que une a los bloques es de $T = 25 \text{ N}$ y la masa del bloque que se encuentra sobre el plano horizontal es de $m_1 = 20 \text{ kg}$. Encuentre la masa del bloque restante y la aceleración con la que se moverán los bloques.

Solución:

Empleando la ecuación 3.8, y despejando la aceleración encontramos que:

$$a = \frac{T}{m_1} = \frac{25 \text{ N}}{20 \text{ kg}} = 1.25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Utilizando la ecuación 3.10 y despejando m_2 , concluimos que:

$$m_2 = \frac{T}{g - a} = \frac{25 \text{ N}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 1.25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2.92 \text{ kg}$$

Ejemplo 3.11

En un arreglo como el que se muestra en la figura 3.7, la tensión en la cuerda que une a los bloques es de $T = 25 \text{ N}$ y la masa del bloque que se encuentra suspendida es de $m_2 = 20 \text{ kg}$. Encuentre la masa del bloque restante y la aceleración con la que se moverán los bloques.

Solución:

Empleando la ecuación 3.10, y despejando la aceleración encontramos que:

$$a = \frac{m_2 g - T}{m_2} = \frac{(20 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) - 25 \text{ N}}{20 \text{ kg}} = 8.55 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Utilizando la ecuación 3.8 y despejando m_1 , concluimos que:

$$m_1 = \frac{T}{a} = \frac{25 \text{ N}}{8.55 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2.92 \text{ kg}$$

Ejemplo 3.12

En un arreglo como el que se muestra en la figura 3.7, la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y la tensión en la cuerda que une los bloques es de $T = 20 \text{ N}$. Encuentre las masas de ambos bloques.

Solución:

Empleando la ecuación 3.8, y despejando m_1 encontramos que:

$$m_1 = \frac{T}{a} = \frac{20 \text{ N}}{4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 5 \text{ kg}$$

Utilizando la ecuación 3.10 y despejando m_2 , concluimos que:

$$m_2 = \frac{T}{g - a} = \frac{20 \text{ N}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 3.45 \text{ kg}$$

Estos resultados son válidos si no hay fricción entre el bloque m_1 y la superficie horizontal. Para el caso en que exista fricción, el bloque m_1 estaría frenado por esta fuerza. Observe la figura 3.8.

La ecuación de las fuerzas que actúan sobre m_1 es:

$$T - fr = m_1 a \quad 3.13$$

$$N - m_1 g = 0 \quad 3.14$$

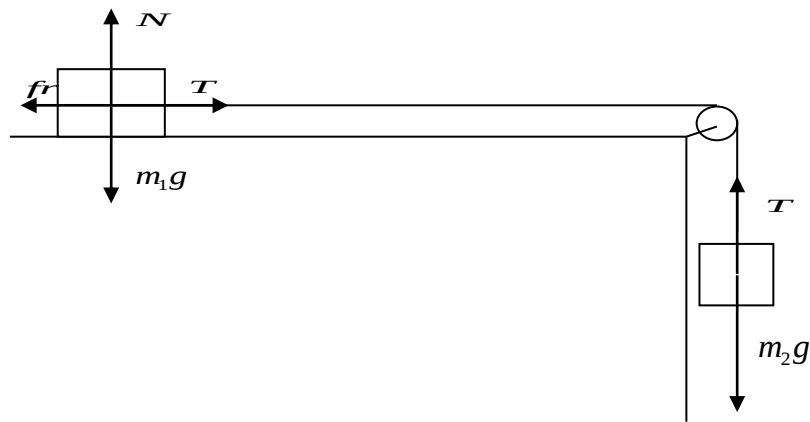


Figura 3.8

$$fr = \mu N \quad 3.15$$

$$T - \mu m_1 g = m_1 a \quad 3.16$$

y para m_2 se tiene:

$$T - m_2 g = -m_2 a \quad 3.17$$

Combinando ambas ecuaciones, tenemos:

$$a = \frac{(m_2 - \mu m_1)g}{m_1 + m_2} \quad 3.18$$

$$T = \frac{(m_1 m_2 + \mu m_1 m_2)g}{m_1 + m_2} \quad 3.19$$

Ejemplo 3.13

En un arreglo como el que se muestra en la figura 3.8, la masa del bloque que se encuentra sobre el plano es de $m_1 = 20 \text{ kg}$ y la que se encuentra suspendida es de $m_2 = 10 \text{ kg}$. Si el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.1$, encuentre la aceleración con la que se moverán los bloques y la tensión en la cuerda.

Solución:

Empleando la ecuación 3.18, y despejando m_1 encontramos que:

$$a = \frac{(m_2 - \mu m_1)g}{m_1 + m_2} = \frac{((10 \text{ kg}) - (0.1)(20 \text{ kg}))(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})}{20 \text{ kg} + 10 \text{ kg}} = \frac{78.4 \text{ N}}{30 \text{ kg}} = 2.61 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

O

Utilizando la ecuación 3.19, concluimos que la tensión es igual a:

$$T = \frac{(m_1 m_2 + \mu m_1 m_2)g}{m_1 + m_2} = \frac{(20 \text{ kg})(10 \text{ kg}) + (0.1)(20 \text{ kg})(10 \text{ kg})}{20 \text{ kg} + 10 \text{ kg}} * 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

O

$$T = \frac{(m_1 m_2 + \mu m_1 m_2)g}{m_1 + m_2} = \frac{2156 \text{ N kg}}{30 \text{ kg}} = 71.86 \text{ N}$$

Ejemplo 3.14

En un arreglo como el que se muestra en la figura 3.8, la masa del bloque que se encuentra sobre el plano es de $m_1 = 20 \text{ kg}$ y la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Si el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.1$, encuentre la tensión en la cuerda que une a los bloques y la masa del bloque restante.

Solución:

Empleando la ecuación 3.16, y despejando T encontramos que:

$$T = m_1(\mu g + a) = (20 \text{ kg})\left(0.1 * 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 119.6 \text{ N}$$

Utilizando la ecuación 3.17 y despejando m_2 concluimos que:

$$m_2 = \frac{T}{g - a} = \frac{119.6 \text{ N}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 24.92 \text{ kg}$$

Ejemplo 3.15

En un arreglo como el que se muestra en la figura 3.8, la masa del bloque que se encuentra suspendida es de $m_2 = 20 \text{ kg}$ y la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Si el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.1$, encuentre la tensión en la cuerda que une a los bloques y la masa del bloque restante.

Solución:

Empleando la ecuación 3.17, y despejando T encontramos que:

$$T = m_2(g - a) = (20 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 96 \text{ N}$$

Utilizando la ecuación 3.16 y despejando m_1 concluimos que:

$$m_1 = \frac{T}{\mu g + a} = \frac{96 \text{ N}}{0.1 * 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 16.05 \text{ kg}$$

Ejemplo 3.16

En un arreglo como el que se muestra en la figura 3.8, la masa del bloque que se encuentra suspendida es de $m_2 = 20 \text{ kg}$ y la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Si la masa del bloque que se encuentra sobre la superficie es igual a $m_1 = 30 \text{ kg}$ encuentre la tensión en la cuerda que une los bloques y el coeficiente de fricción.

Solución:

Empleando la ecuación 3.17, y despejando T encontramos que:

$$T = m_2(g - a) = (20 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 136 \text{ N}$$

Utilizando la ecuación 3.16 y despejando μ concluimos que:

$$\mu = \frac{T - m_1 a}{m_1 g} = \frac{136 \text{ N} - (30 \text{ kg}) \left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}{(30 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)} = 0.1564$$

Ejemplo 3.17

En un arreglo como el que se muestra en la figura 3.8, la masa del bloque que se encuentra suspendida es de $m_2 = 20 \text{ kg}$ y la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Si el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.1$, encuentre la tensión en la cuerda que une ambos bloques y la masa del bloque que se encuentra sobre la superficie horizontal.

Solución:

Empleando la ecuación 3.17, y despejando T encontramos que:

$$T = m_2(g - a) = (20 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 136 \text{ N}$$

Utilizando la ecuación 3.16 y despejando m_1 concluimos que:

$$m_1 = \frac{T}{\mu g + a} = \frac{136 \text{ N}}{(0.1) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) + 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 34.17 \text{ kg}$$

Ejemplo 3.18

En un arreglo como el que se muestra en la figura 3.8, la masa del bloque que se encuentra sobre la superficie horizontal es de $m_1 = 20 \text{ kg}$ y la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Si la tensión en la cuerda que une los bloques es de $T = 80 \text{ N}$, encuentre el coeficiente de fricción y la masa del bloque que se encuentra suspendida.

Solución:

Empleando la ecuación 3.16, y despejando μ encontramos que:

$$\mu = \frac{T - m_1 a}{m_1 g} = \frac{80 \text{ N} - (20 \text{ kg}) \left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}{(20 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)} = 0.102$$

Utilizando la ecuación 3.17 y despejando m_2 concluimos que:

$$m_2 = \frac{T}{g - a} = \frac{80 \text{ N}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 11.76 \text{ kg}$$

Ejemplo 3.19

En un arreglo como el que se muestra en la figura 3.8, la tensión en la cuerda que une los bloques es de $T = 60 \text{ N}$, la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Si el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.1$, las masas de los bloques.

Solución:

Empleando la ecuación 3.16, y despejando μ encontramos que:

$$m_1 = \frac{T}{\mu g + a} = \frac{60 \text{ N}}{(0.1) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) + 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 15.07 \text{ kg}$$

Utilizando la ecuación 3.17 y despejando m_2 concluimos que:

$$m_2 = \frac{T}{g - a} = \frac{60 \text{ N}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 8.82 \text{ kg}$$

3.6.3 Plano inclinado

Consideremos un bloque que se encuentra sobre un plano inclinado como el que se muestra en la figura 3.9. La segunda ley de Newton establece que la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, es igual al producto de la masa del cuerpo por la aceleración que experimente. En consecuencia, para identificar las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, se dibuja un diagrama por separado del cuerpo aislado, mostrando un marco de referencia y todas las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo. Este diagrama se le conoce como Diagrama de Cuerpo Libre.

Las ecuaciones de las fuerzas para m son:

$$mg \sin \theta - fr = m a \quad 3.20$$

$$fr = \mu N \quad 3.21$$

$$N - m_1 g \cos \theta = 0 \quad 3.22$$

Sustituyendo la ecuación 3.22 en la ecuación 3.21 y la 3.21 en la 3.20 se tiene que la aceleración con la que se moverá el bloque es de:

$$a = (\sin \theta - \mu \cos \theta) g \quad 3.23$$

Si la aceleración es igual a cero, el coeficiente de fricción es:

$$\mu = \tan \theta \quad 3.24$$

Es decir, el coeficiente de fricción para un bloque que comienza a deslizarse sobre un plano inclinado es igual a la tangente del ángulo que forma el plano inclinado al momento de comenzar a deslizarse el bloque.

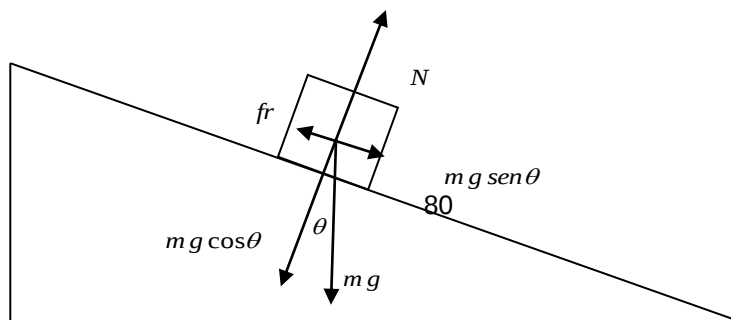


Figura 3.9

Ejemplo 3.20

Calcule la aceleración con la que se deslizará un bloque mostrado en la figura 3.9, si el ángulo de inclinación es de $\theta = 60^\circ$ y el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.5$.

Solución:

Utilizando la ecuación 3.23, la aceleración es igual a:

$$a = (\sin \theta - \mu \cos \theta)g = (\sin 60^\circ - (0.5)(\cos 60^\circ))\left(9.8 \frac{m}{s^2}\right) = 6.03 \frac{m}{s^2}$$

Ejemplo 3.21

Calcule el coeficiente de fricción entre el plano inclinado y un bloque que se encuentre sobre él como el mostrado en la figura 3.9, si la aceleración con la que se desliza el bloque es de $a = 4 \frac{m}{s^2}$ y el ángulo de inclinación es de $\theta = 50^\circ$

Solución:

Despejando el coeficiente de fricción en la ecuación 3.23, se tiene que el coeficiente de fricción es de:

$$\mu = \frac{g \sin \theta - a}{g \cos \theta} = \frac{\left(9.8 \frac{m}{s^2}\right)(\sin 50^\circ) - 4 \frac{m}{s^2}}{\left(9.8 \frac{m}{s^2}\right)(\cos 50^\circ)} = 0.5567$$

Ejemplo 3.22

Calcule el ángulo por el cual un bloque se mueve sobre un plano inclinado como el mostrado en la figura 3.9, si la aceleración con la que se desliza es de $a = 3 \frac{m}{s^2}$ y el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.6$.

Solución:

Al utilizar la ecuación 3.23 vemos que es difícil, para los objetivos de la obra, despejar el ángulo por el cual el bloque se desliza con la aceleración y coeficiente de fricción dado en el problema. Para saber el ángulo se recurre al método gráfico, el cual en el lado izquierdo de la misma ecuación se colocan los términos constantes y en el lado restante los términos que contienen la variable buscada. Así, esta ecuación queda de la siguiente manera:

$$\frac{a}{g} = \sin \theta - (\mu) \cos \theta = \frac{3 \frac{m}{s^2}}{9.8 \frac{m}{s^2}} = 0.3061$$

Al graficar ambos lados de la ecuación, observamos que el cruce de ambas gráficas nos revela el ángulo por el cual se desliza el bloque con la aceleración y el coeficiente de fricción establecidos en el problema.

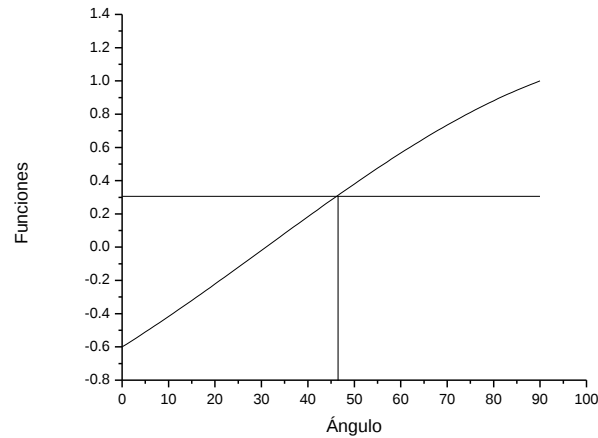


Figura 3.10

En la figura 3.10 se muestra que el ángulo en el cual se cruzan ambas gráficas es en $\theta = 46^\circ$, aproximadamente.

Ejemplo 3.23

Si el ángulo con el cual comienza a deslizarse un bloque sobre un plano inclinado es de $\theta = 30^\circ$. Calcule el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano inclinado.

Solución:

Utilizando la ecuación 3.24, se tiene que el coeficiente de fricción es:

$$\mu = \tan \theta = \tan 30^\circ = 0.5773$$

Ejemplo 3.24

Si el coeficiente de fricción entre un plano inclinado y el bloque que se encuentra sobre él como se muestra en la figura 3.9, es de $\mu = 1.5$, encuentre el ángulo por el cual comienza a deslizarse.

Solución:

Despejando el ángulo de la ecuación 24, se tiene:

$$\theta = \tan^{-1}(\mu) = \tan^{-1}(1.5) = 56.30^\circ$$

Encuentre la aceleración con la que se moverá el bloque y la tensión en la cuerda mostrada en la figura 3.11, suponiendo que los coeficientes de fricción entre los bloques y la superficie horizontal es el mismo.

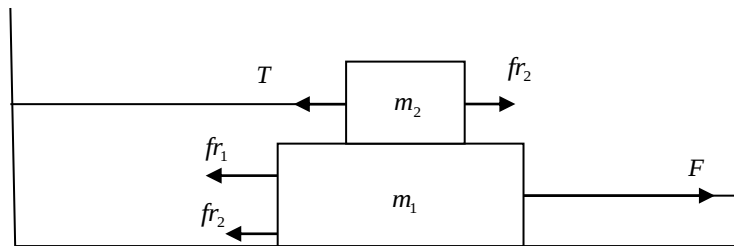


Figura 3.11

Las ecuaciones de las fuerzas para cada bloque son:

$$F - fr_1 - fr_2 = m_1 a \quad 3.25$$

Donde:

$$fr_1 = \mu(m_1 + m_2)g \quad 3.26$$

Y

$$fr_2 = \mu m_2 g \quad 3.27$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.26 y 3.27 en la ecuación 3.25, se obtiene:

$$F - \mu(m_1 + m_2)g - \mu m_2 g = m_1 a \quad 3.28$$

Y

$$T - \mu m_2 g = 0 \quad 3.29$$

Resolviendo:

$$a = \frac{F - \mu(m_1 + 2 m_2)g}{m_1} \quad 3.30$$

Y

$$T = \mu m_2 g \quad 3.31$$

Ejemplo 3.25

Calcule la tensión y la aceleración con la que se moverá el bloque de masa m_1 mostrado en la figura 3.11, si el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.5$, las masas de los bloques son $m_1 = 20 \text{ kg}$ y $m_2 = 10 \text{ kg}$, y la fuerza con la que se jala el bloque de masa m_1 es igual a $F = 200 \text{ N}$.

Solución:

Utilizando las ecuaciones 3.30 y 3.31, se tiene:

$$a = \frac{F - \mu(m_1 + 2 m_2)g}{m_1} = \frac{200 \text{ N} - (0.5)(20 \text{ kg} + (2)(10 \text{ kg}))(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})}{20 \text{ kg}} = 0.2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Y

$$T = \mu m_2 g = (0.5)(10 \text{ kg})(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) = 49 \text{ N}$$

Ejemplo 3.26

Calcule las masas de los bloques mostrados en la figura 3.11 si la tensión en la cuerda es de $T = 150 \text{ N}$, el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.5$, la aceleración con la que se mueve el bloque de masa m_1 es de $a = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y la fuerza con que es tirado el bloque de masa m_1 es de $F = 400 \text{ N}$.

Solución:

Utilizando la ecuación 3.31, y despejando m_2 , se tiene:

$$m_2 = \frac{T}{\mu g} = \frac{150 \text{ N}}{(0.5)(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})} = 30.61 \text{ kg}$$

Utilizando la ecuación 3.30 y despejando m_1 , se tiene:

$$m_1 = \frac{F - 2 \mu m_2 g}{a + \mu g} = \frac{400 \text{ N} - (2)(0.5)(30.61 \text{ kg})(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})}{1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + (0.5)(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})} = 16.95 \text{ kg}$$

Ejemplo 3.27

Calcule el coeficiente de fricción y la tensión en la cuerda mostrados en la figura 3.11 si las masas de los bloques son $m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 5 \text{ kg}$, la aceleración es de $a = 2 \frac{m}{s^2}$ y la fuerza es de $F = 100 \text{ N}$.

Solución:

Empleando la ecuación 3.30 y despejando el coeficiente de fricción, se tiene:

$$\mu = \frac{F - m_1 a}{(m_1 + 2 m_2)g} = \frac{100 \text{ N} - (10 \text{ kg})\left(2 \frac{m}{s^2}\right)}{(10 \text{ kg} + (2)(5 \text{ kg}))\left(9.8 \frac{m}{s^2}\right)} = 0.41$$

Y empleando la ecuación 3.31, la tensión es igual a:

$$T = \mu m_2 g = (0.41)(5 \text{ kg})\left(9.8 \frac{m}{s^2}\right) = 20.09 \text{ N}$$

Ejemplo 3.28

Calcule la tensión en la cuerda y la fuerza con la que se jala el bloque de masa m_1 mostrado en la figura 3.11, si las masas de los bloques son $m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 5 \text{ kg}$, el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.5$, la aceleración con la que se mueve el bloque m_1 es de $a = 3 \frac{m}{s^2}$.

Solución:

Empleando la ecuación 3.30 y despejando la fuerza, se tiene:

$$F = \mu(m_1 + 2 m_2)g + m_1 a = (0.5)(10 \text{ kg} + (2)(5 \text{ kg}))\left(9.8 \frac{m}{s^2}\right) = 98 \text{ N}$$

Y empleando la ecuación 3.31, la tensión es igual a:

$$T = \mu m_2 g = (0.5)(5 \text{ kg})\left(9.8 \frac{m}{s^2}\right) = 24.5 \text{ N}$$

Ejemplo 3.29

Calcule el coeficiente de fricción y la aceleración con la que se moverá el bloque de masa m_1 mostrado en la figura 3.11, si tensión es de $T = 10 \text{ N}$, las masas de los bloques son $m_1 = 20 \text{ kg}$ y $m_2 = 10 \text{ kg}$ y la fuerza con la que son jalados es igual a $F = 100 \text{ N}$.

Solución:

Utilizando la ecuación 3.31 y despejando el coeficiente de fricción, se tiene:

$$\mu = \frac{T}{m_2 g} = \frac{10 \text{ N}}{(10 \text{ kg})\left(9.8 \frac{m}{s^2}\right)} = 0.102$$

Empleando la ecuación 3.30 y despejando la aceleración, se tiene:

$$a = \frac{F - \mu(m_1 + 2 m_2)g}{m_1} = \frac{100 \text{ N} - (0.102)(20 \text{ kg} + (2)(10 \text{ kg}))\left(9.8 \frac{m}{s^2}\right)}{(20 \text{ kg})} = 3.5 \frac{m}{s^2}$$

Encuentre la aceleración con la que se moverán los bloques y la tensión en la cuerda mostrada en la figura 3.12, suponiendo que los coeficientes de fricción entre los bloques y la superficie horizontal son los mismos.

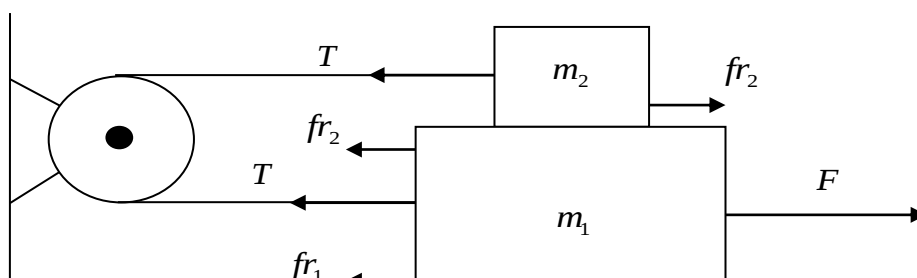


Figura 3.12

Las ecuaciones de las fuerzas para el bloque de masa m_1 , son:

$$fr_1 = \mu(m_1 + m_2) \quad 3.32$$

$$fr_2 = \mu m_2 \quad 3.33$$

$$F - fr_1 - fr_2 - T = m_1 a \quad 3.34$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.32 y 3.33 en la ecuación 3.34, tenemos:

$$F - \mu m_1 g - 2\mu m_2 g - T = m_1 a \quad 3.35$$

Las ecuaciones de las fuerzas para el bloque de masa m_2 , son:

$$T - fr_2 = m_2 a \quad 3.36$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.33 en la 3.36 se concluye que la tensión es igual a:

$$T - \mu m_2 g = m_2 a \quad 3.37$$

Resolviendo para a , se tiene que la aceleración es igual a:

$$a = \frac{F - 3\mu m_2 g - \mu m_1 g}{m_1 + m_2} \quad 3.38$$

y para la tensión se tiene:

$$T = \frac{m_2(F - 2\mu m_2 g)}{m_1 + m_2} \quad 3.39$$

Ejemplo 3.30

Calcule la tensión y la aceleración con la que se moverán los bloques mostrados en la figura 3.12, si el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.5$, las masas de los bloques son $m_1 = 20 \text{ kg}$ y $m_2 = 10 \text{ kg}$ y la fuerza con la que son jalados es igual a $F = 400 \text{ N}$.

Solución:

Utilizando las ecuaciones 3.38, se tiene que la aceleración es igual a:

$$a = \frac{F - 3\mu m_2 g - \mu m_1 g}{m_1 + m_2} = \frac{400 \text{ N} - (3)(0.5)(10 \text{ kg})\left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) - (0.5)(20 \text{ kg})\left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}{20 \text{ kg} + 10 \text{ kg}}$$

Equivalentemente, se tiene:

$$a = 5.16 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Al utilizar la ecuación 3.39, se tiene que la tensión es igual a:

$$T = \frac{m_2(F - 2\mu m_2 g)}{m_1 + m_2} = \frac{(10 \text{ kg}) \left(400 \text{ N} - (2)(0.5)(10 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \right)}{20 \text{ kg} + 10 \text{ kg}} = 100.66 \text{ N}$$

Ejemplo 3.31

Calcule las masas de los bloques mostrados en la figura 3.12 si la tensión en la cuerda es de $T = 20 \text{ N}$, el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.5$, la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y la fuerza con que es tirado el bloque es de $F = 400 \text{ N}$.

Solución:

Utilizando la ecuación 3.37 y despejando m_2 , se tiene:

$$m_2 = \frac{T}{\mu g + a} = \frac{20 \text{ N}}{(0.5) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) + \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)} = 3.38 \text{ kg}$$

Al utilizar la ecuación 38 y despejando m_1 , se tiene:

$$m_1 = \frac{F - 3\mu m_2 g - m_2 a}{\mu g + a} = \frac{400 \text{ N} - (3)(0.5)(3.38 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) - (3.38 \text{ kg}) \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}{(0.5) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) + \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)} = 58.8 \text{ kg}$$

Ejemplo 3.32

Calcule el coeficiente de fricción y la tensión en la cuerda mostrados en la figura 3.12 si las masas de los bloques son $m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 5 \text{ kg}$, la aceleración es de $a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y la fuerza es de $F = 100 \text{ N}$.

Solución:

Sumando la ecuación 3.35 a la 3.37, se tiene:

$$F - \mu m_1 g - 3\mu m_2 g = (m_1 + m_2)a$$

En consecuencia:

$$\mu = \frac{F - (m_1 + m_2)a}{(m_1 + 3m_2)g} = \frac{100 \text{ N} - (10 \text{ kg} + 5 \text{ kg}) \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}{(10 \text{ kg} + (3)(5 \text{ kg})) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)} = 0.2857$$

Empleando la ecuación 3.37 y despejando la tensión, se tiene:

$$T = m_2(a + \mu g) = (5 \text{ kg}) \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + (0.2857) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \right) = 23.99 \text{ N}$$

Ejemplo 3.33

Calcule la tensión en la cuerda y la fuerza con la que se jala el bloque de masa m_1 mostrado en la figura 3.12, si las masas de los bloques son $m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 5 \text{ kg}$, el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.5$, la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Solución:

Empleando la ecuación 3.37 y despejando la tensión, se tiene:

$$T = m_2(\mu g + a) = (5 \text{ kg}) \left((0.5) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) + 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 39.5 \text{ N}$$

Empleando la ecuación 3.35 y despejando la fuerza, se tiene:

$$F = m_1(\mu g + a) + 2\mu m_2 g + T$$

$$F = (10 \text{ kg}) \left((0.5) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) + 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) + (2)(0.5)(5 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) + 39.5 \text{ N}$$

$$F = 167.5 \text{ N}$$

¿En la figura 3.13, qué fuerza se necesita para dar a los bloques una aceleración de 3.0 m/s^2 para un coeficiente de fricción dado?

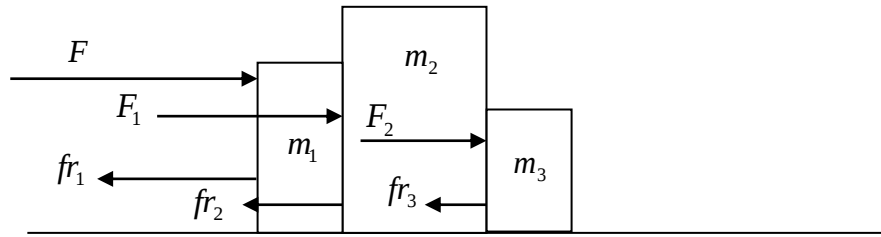


Figura 3.13

Las expresiones de las fuerzas que actúan en cada bloque están dadas por:

$$F - fr_1 = a(m_1 + m_2 + m_3) \quad 3.40$$

$$fr_1 = \mu(m_1 + m_2 + m_3)g \quad 3.41$$

$$F - \mu(m_1 + m_2 + m_3)g = a(m_1 + m_2 + m_3) \quad 3.42$$

Despejando la aceleración de esta última ecuación se tiene:

$$a = \frac{F - \mu(m_1 + m_2 + m_3)g}{m_1 + m_2 + m_3} \quad 3.43$$

La fuerza que existe entre los bloques 1 y 2 es:

$$F_1 - fr_2 = a(m_2 + m_3) \quad 3.44$$

$$fr_2 = \mu(m_2 + m_3)g \quad 3.45$$

$$F_1 - \mu(m_2 + m_3)g = a(m_2 + m_3) \quad 3.46$$

En consecuencia, la fuerza F_1 o la fuerza entre los bloques 1 y 2 es igual a:

$$F_1 = \mu(m_2 + m_3)g + a(m_2 + m_3) \quad 3.47$$

Sustituyendo la aceleración, se tiene:

$$F_1 = \mu(m_2 + m_3)g + \frac{(m_2 + m_3)(F - \mu(m_1 + m_2 + m_3)g)}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(m_2 + m_3)F}{m_1 + m_2 + m_3} \quad 3.48$$

Las fuerzas que actúan sobre el bloque 3 son:

$$F_2 - fr_3 = m_3 a \quad 3.49$$

Donde:

$$fr_3 = \mu m_3 g \quad 3.50$$

$$F_2 - \mu m_3 g = m_3 a \quad 3.51$$

Finalmente, la fuerza F_2 es igual a:

$$F_2 = \mu m_3 g + m_3 a \quad 3.52$$

Sustituyendo la aceleración, se concluye que F_2 o la fuerza entre el bloque 2 y 3 es igual a:

$$F_2 = \mu m_3 g + m_3 a = \mu m_3 g + \frac{m_3(F - \mu(m_1 + m_2 + m_3)g)}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_3 F}{m_1 + m_2 + m_3} \quad 3.53$$

Ejemplo 3.34

Calcule las fuerzas que actúan en cada bloque mostrado en la figura 3.13, si el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.5$, la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 3 \frac{m}{s^2}$ y la masa de los bloques es de $m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 20 \text{ kg}$ y $m_3 = 30 \text{ kg}$.

Solución:

Utilizando la ecuación 3.42 y despejando la fuerza, tenemos:

$$F = (\mu g + a)(m_1 + m_2 + m_3) = \left((0.5) \left(9.8 \frac{m}{s^2} \right) + 3 \frac{m}{s^2} \right) (10 \text{ kg} + 20 \text{ kg} + 30 \text{ kg}) = 474 \text{ N}$$

Utilizando la ecuación 3.46 y despejando la fuerza F_1 , tenemos:

$$F_1 = (\mu g + a)(m_2 + m_3) = \left((0.5) \left(9.8 \frac{m}{s^2} \right) + 3 \frac{m}{s^2} \right) (20 \text{ kg} + 30 \text{ kg}) = 395 \text{ N}$$

Utilizando la ecuación 3.52 y despejando la fuerza F_2 , tenemos:

$$F_2 = (\mu g + a) m_3 = \left((0.5) \left(9.8 \frac{m}{s^2} \right) + 3 \frac{m}{s^2} \right) (30 \text{ kg}) = 237 \text{ N}$$

Ejemplo 3.35

Calcule el coeficiente de fricción y la fuerza, si la aceleración con la que se mueven los bloques de la figura 3.13 es $a = 2 \frac{m}{s^2}$, las masas de los bloques son $m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 20 \text{ kg}$ y $m_3 = 30 \text{ kg}$, y la fuerza entre el bloque 2 y 3 es $F_2 = 100 \text{ N}$.

Solución:

Utilizando las ecuaciones 3.53, se tiene que la fuerza F es igual a:

$$F = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)F_2}{m_3} = \frac{(10 \text{ kg} + 20 \text{ kg} + 30 \text{ kg})(100 \text{ N})}{30 \text{ kg}} = 200 \text{ N}$$

Para calcular el coeficiente de fricción, utilizamos la ecuación 3.42, es decir:

$$\mu = \frac{F - a(m_1 + m_2 + m_3)}{(m_1 + m_2 + m_3)g} = \frac{200 \text{ N} - \left(2 \frac{m}{s^2} \right) (10 \text{ kg} + 20 \text{ kg} + 30 \text{ kg})}{(10 \text{ kg} + 20 \text{ kg} + 30 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{m}{s^2} \right)} = 0.136$$

Ejemplo 3.36

Calcule la aceleración y la fuerza F , si el coeficiente de fricción que existe entre la superficie horizontal y los bloques es de $\mu = 0.3$, las masas de los bloques son $m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 20 \text{ kg}$ y $m_3 = 30 \text{ kg}$, la fuerza entre el bloque 2 y 3 es $F_2 = 200 \text{ N}$.

Solución:

Utilizando las ecuaciones 3.53, se tiene que la fuerza F es igual a:

$$F = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)F_2}{m_3} = \frac{(10 \text{ kg} + 20 \text{ kg} + 30 \text{ kg})(200 \text{ N})}{30 \text{ kg}} = 400 \text{ N}$$

Para calcular la aceleración con la que se moverán los bloques, utilizamos la ecuación 3.42, es decir:

$$a = \frac{F - \mu(m_1 + m_2 + m_3)g}{(m_1 + m_2 + m_3)} = \frac{400 \text{ N} - (0.3)(10 \text{ kg} + 20 \text{ kg} + 30 \text{ kg})\left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}{(10 \text{ kg} + 20 \text{ kg} + 30 \text{ kg})} = 3.72 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Tres bloques m_1 , m_2 y m_3 están unidos como se muestra en la figura 3.14. Para un determinado coeficiente de fricción estático entre el bloque de masa m_2 y la superficie horizontal, calcular la aceleración con la que se moverán los bloques y las tensiones en las cuerdas.

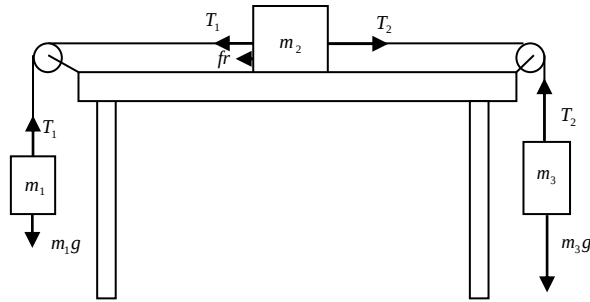


Figura 3.14

Las fuerzas que actúan en cada bloque se muestran en la figura 3.14. En consecuencia, las ecuaciones de las fuerzas para cada cuerpo son:

$$T_1 - m_1 g = m_1 a \quad 3.54$$

$$T_2 - T_1 - fr = m_2 a \quad 3.55$$

$$T_2 - m_3 g = -m_3 a \quad 3.56$$

$$fr = \mu m_2 g \quad 3.57$$

Sustituyendo la ecuación 3.51 en la 3.49, se tiene:

$$T_2 - T_1 - \mu m_2 g = m_2 a \quad 3.58$$

Combinando estas cuatro ecuaciones encontramos que la aceleración a , las tensiones T_1 y T_2 en función de las masas m_1 , m_2 y m_3 , son:

$$a = \frac{m_3 g - m_1 g - \mu m_2 g}{m_1 + m_2 + m_3} \quad 3.59$$

$$T_1 = \frac{2m_1 m_3 g + m_1 m_2 g - \mu m_1 m_2 g}{m_1 + m_2 + m_3} \quad 3.60$$

$$T_2 = \frac{2m_1 m_3 g + \mu m_2 m_3 g + m_2 m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3} \quad 3.61$$

Estos resultados se obtuvieron suponiendo que la masa m_3 se mueve hacia abajo, venciendo la masa y la fricción de m_2 y el peso de la masa m_1 .

Ejemplo 3.37

Calcule la aceleración con la que se mueven los bloques y las tensiones en las cuerdas mostrados en la figura 3.14 si sus masas son de $m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 20 \text{ kg}$, $m_3 = 30 \text{ kg}$ y el coeficiente de fricción es igual a $\mu = 0.2$.

Solución:

Utilizando la ecuación 3.59, la aceleración es igual a:

$$a = \frac{m_3 g - m_1 g - \mu m_2 g}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(30 \text{ kg} - 10 \text{ kg} - (0.2)(20 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2))}{10 \text{ kg} + 20 \text{ kg} + 30 \text{ kg}} = 2.61 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Utilizando la ecuación 3.60, vemos que la tensión T_1 es igual a:

$$T_1 = \frac{(2)(10 \text{ kg})(30 \text{ kg}) + (10 \text{ kg})(20 \text{ kg})\left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) - (0.2)(10 \text{ kg})(20 \text{ kg})\left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}{10 \text{ kg} + 20 \text{ kg} + 30 \text{ kg}} = 36.13 \text{ N}$$

Utilizando la ecuación 3.61, vemos que la tensión T_2 es igual a:

$$T_2 = \frac{(2)(10 \text{ kg})(30 \text{ kg}) + (0.2)(20 \text{ kg})(30 \text{ kg})\left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) + (20 \text{ kg})(30 \text{ kg})\left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}{10 \text{ kg} + 20 \text{ kg} + 30 \text{ kg}} = 127.6 \text{ N}$$

Ejemplo 3.38

Calcule las masas de los bloques mostrados en la figura 3.14, si las tensiones en las cuerdas son iguales a $T_1 = 20 \text{ N}$ y $T_2 = 150 \text{ N}$, la aceleración es de $a = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y el coeficiente de fricción es igual a $\mu = 0.2$.

Solución:

Utilizando la ecuación 3.54, vemos que la masa m_1 es igual a:

$$m_1 = \frac{T_1}{g + a} = \frac{20 \text{ N}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1.56 \text{ kg}$$

Utilizando la ecuación 3.56, vemos que la masa m_3 es igual a:

$$m_3 = \frac{T_2}{g - a} = \frac{150 \text{ N}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 22.06 \text{ kg}$$

Finalmente, empleando la ecuación 3.58, concluimos que la masa m_2 es igual a:

$$m_2 = \frac{T_2 - T_1}{\mu g + a} = \frac{150 \text{ N} - 20 \text{ N}}{(0.2)\left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) + 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 26.21 \text{ kg}$$

Ejemplo 3.39

Calcule las masas m_1 y m_3 , y el coeficiente de fricción que existe entre el bloque de masa m_2 y la superficie horizontal mostrados en la figura 3.14, si las tensiones en las cuerdas son iguales a $T_1 = 20 \text{ N}$ y $T_2 = 40 \text{ N}$, la aceleración es de $a = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y la masa del bloque 2 es igual a $m_2 = 5 \text{ kg}$.

Solución:

Utilizando la ecuación 3.58, vemos que el coeficiente de fricción es igual a:

$$\mu = \frac{T_2 - T_1 - m_2 a}{m_2 g} = \frac{40 \text{ N} - 20 \text{ N} - (5 \text{ kg})\left(3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}{(5 \text{ kg})\left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)} = 0.102$$

Utilizando la ecuación 3.54, vemos que la masa m_1 es igual a:

$$m_1 = \frac{T_1}{g + a} = \frac{20 \text{ N}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1.56 \text{ kg}$$

Utilizando la ecuación 3.56, vemos que la masa m_3 es igual a:

$$m_3 = \frac{T_2}{g - a} = \frac{40 \text{ N}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 5.88 \text{ kg}$$

Calcular la aceleración con la que se moverán los bloques de la figura 3.15, suponiendo que se aplica una fuerza F y los coeficientes de fricción entre la superficie y los bloques son diferentes.

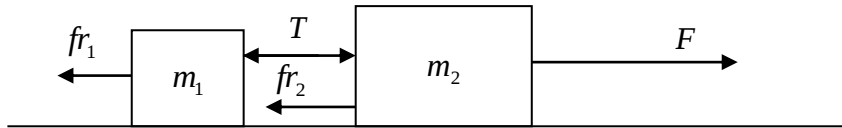


Figura 3.15

Las fuerzas que actúan en cada bloque están mostradas en la misma figura. Las ecuaciones de las fuerzas para cada cuerpo son:

$$T - fr_1 = m_1 a \quad 3.62$$

$$fr_1 = \mu_1 m_1 g \quad 3.63$$

$$T - \mu_1 m_1 g = m_1 a \quad 3.64$$

$$F - T - fr_2 = m_2 a \quad 3.65$$

$$fr_2 = \mu_2 m_2 g \quad 3.66$$

$$F - T - \mu_2 m_2 g = m_2 a \quad 3.67$$

Utilizando las ecuaciones 3.62 y 3.67, la aceleración a se calcula por medio de la siguiente ecuación:

$$a = \frac{F - \mu_2 m_2 g - \mu_1 m_1 g}{m_1 + m_2} \quad 3.68$$

Despejando la tensión contenida en la ecuación 58 y sustituyendo la aceleración expresada en la ecuación 62, se tiene:

$$T = \frac{m_1 F + m_1 m_2 (\mu_1 - \mu_2) g}{m_1 + m_2} \quad 3.69$$

Si no hubiese fricción entre la superficie y los bloques, la ecuación para la aceleración y la tensión se simplificarían:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} \quad 3.70$$

Y

$$T = \frac{m_1 F}{m_1 + m_2} \quad 3.71$$

Ejemplo 3.40

Calcule la aceleración con la que se moverán los bloques y la tensión en la cuerda mostrados en la figura 3.15 si las masas de los bloques son $m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 20 \text{ kg}$, los coeficientes de fricción son $\mu_1 = 0.2$ y $\mu_2 = 0.3$ y la fuerza con la que se mueven es $F = 150 \text{ N}$.

Solución:

Utilizando la ecuación 3.68, la aceleración con la que se moverán los bloques es igual a:

$$a = \frac{F - \mu_2 m_2 g - \mu_1 m_1 g}{m_1 + m_2} = \frac{150 \text{ N} - ((0.3)(20 \text{ kg}) + (0.2)(10 \text{ kg}))(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})}{10 \text{ kg} + 20 \text{ kg}} = 2.38 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Utilizando la ecuación 3.69, la tensión en la cuerda es igual a:

$$T = \frac{m_1 F + m_1 m_2 (\mu_1 - \mu_2) g}{m_1 + m_2} = \frac{(10 \text{ kg})(150 \text{ N}) + (10 \text{ kg})(20 \text{ kg})(0.2 - 0.3)(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})}{10 \text{ kg} + 20 \text{ kg}} = 43.46 \text{ N}$$

Ejemplo 3.41

Calcule la tensión y la fuerza que se aplica al bloque de masa m_2 mostrado en la figura 3.15, si la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, las masas de los bloques son $m_1 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 20 \text{ kg}$ y los coeficientes de fricción $\mu_1 = 0.2$ y $\mu_2 = 0.3$.

Solución:

Utilizando la ecuación 3.64, la tensión en la cuerda que tira del bloque de masa m_1 es igual a:

$$T = m_1 (\mu_1 g + a) = (10 \text{ kg}) \left((0.2) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) + 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 49.6 \text{ N}$$

Finalmente, la fuerza que actúa sobre el bloque de masa m_2 se calcula por medio de la ecuación 3.65:

$$F = T + \mu_2 m_2 g + m_2 a = 49.6 \text{ N} + (20 \text{ kg}) \left((0.3) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) + 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 168.4 \text{ N}$$

Ejemplo 3.42

Calcule la tensión y la masa m_2 del bloque mostrado en la figura 3.15, si la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, la fuerza que tira del bloque de masa m_2 es de $F = 150 \text{ N}$ la masa $m_1 = 15 \text{ kg}$ y los coeficientes de fricción son $\mu_1 = 0.2$ y $\mu_2 = 0.3$.

Solución:

Utilizando la ecuación 3.64, la tensión en la cuerda que tira del bloque de masa m_1 es igual a:

$$T = m_1 (\mu_1 g + a) = (15 \text{ kg}) \left((0.2) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) + 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 89.4 \text{ N}$$

Empleando la ecuación 3.67, la masa m_2 del bloque es igual a:

$$m_2 = \frac{F - T}{\mu_2 g + a} = \frac{150 \text{ N} - 89.4 \text{ N}}{(0.3) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) + 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 8.73 \text{ kg}$$

Ejemplo 3.43

Calcule la tensión y la masa m_1 del bloque mostrado en la figura 3.15, si la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, la fuerza que tira del bloque de masa m_2 es de $F = 150 \text{ N}$, la masa $m_2 = 20 \text{ kg}$ y los coeficientes de fricción son $\mu_1 = 0.2$ y $\mu_2 = 0.3$.

Solución:

Utilizando la ecuación 3.67, la tensión en la cuerda que tira del bloque de masa m_1 es igual a:

$$T = F - m_2(\mu_2 g + a) = 150 \text{ N} - (20 \text{ kg}) \left((0.3) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) + 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 11.2 \text{ N}$$

Utilizando ahora la ecuación 3.64, la masa m_1 del bloque es igual a:

$$m_1 = \frac{T}{\mu_1 g + a} = \frac{11.2 \text{ N}}{(0.2) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) + 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1.88 \text{ kg}$$

Ejemplo 3.44

Calcule las masas de los bloques mostrados en la figura 3.15, si la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, la fuerza que tira del bloque de masa m_2 es de $F = 250 \text{ N}$, la tensión en la cuerda es $T = 100 \text{ N}$ y los coeficientes de fricción son $\mu_1 = 0.2$ y $\mu_2 = 0.3$.

Solución:

Utilizando la ecuación 3.64, la masa m_1 es igual a:

$$m_1 = \frac{T}{\mu_1 g + a} = \frac{100 \text{ N}}{(0.2) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) + 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 14.37 \text{ kg}$$

Utilizando la ecuación 3.67, la masa m_2 es igual a:

$$m_2 = \frac{F - T}{\mu_2 g + a} = \frac{250 \text{ N} - 100 \text{ N}}{(0.3) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) + 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 18.89 \text{ kg}$$

Calcule la tensión en la cuerda que sujeta a un bloque como el mostrado en la figura 3.16 si: a).- El bloque se encuentra en reposo, b).- El bloque se mueve hacia arriba o hacia abajo con velocidad constante, c).- El bloque se mueve hacia arriba con una determinada aceleración y d).- El bloque se mueve hacia abajo con una determinada aceleración.

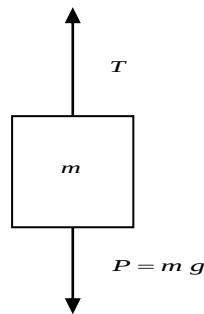


Figura 3.16

a).- Si el bloque se encuentra estático, la tensión es igual a peso, es decir:

$$T = m g \quad 3.72$$

b).- Si el bloque se mueve con velocidad constante hacia arriba y hacia abajo, la tensión de nuevo es igual a peso, es decir:

$$T = m g$$

c).- Si el bloque sube con una aceleración de $a = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, la tensión es igual a:

$$T - m g = m a$$

Es decir:

$$T = m (g + a) \quad 3.73$$

d).- Si el bloque baja con una aceleración de $a = 6 \frac{m}{s^2}$, la tensión es igual a:

$$T - m g = - m a$$

Es decir:

$$T = m (g - a) \quad 3.74$$

Ejemplo 3.45

Calcule la tensión en la cuerda que sujeta un bloque de $m = 100 \text{ kg}$ de masa si: a).- El bloque se encuentra en reposo, b).- El bloque se mueve hacia arriba o hacia abajo con velocidad constante, c).- El bloque se mueve hacia arriba con una aceleración de $a = 6 \frac{m}{s^2}$ y d).- El bloque se mueve hacia abajo con una aceleración de $a = 3 \frac{m}{s^2}$.

Solución:

a).- Si el bloque se encuentra estático, la tensión es igual a peso, es decir:

$$T = m g = (100 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{m}{s^2} \right) = 980 \text{ N}$$

b).- Si el bloque se mueve con velocidad constante hacia arriba y hacia abajo, la tensión de nuevo es igual a peso, es decir:

$$T = m g = (100 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{m}{s^2} \right) = 980 \text{ N}$$

c).- Si el bloque sube con una aceleración de $a = 6 \frac{m}{s^2}$, la tensión es igual a:

$$T = m (g + a) = (100 \text{ kg}) \left(\frac{9.8m}{s^2} + 6 \frac{m}{s^2} \right) = 1580 \text{ N}$$

d).- Si el bloque baja con una aceleración de $a = 3 \frac{m}{s^2}$, la tensión es igual a:

$$T = m (g - a) = (100 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{m}{s^2} - 3 \frac{m}{s^2} \right) = 680 \text{ N}$$

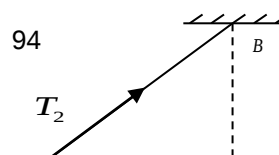
3.7 Preguntas y problemas

Preguntas

- 1.- Establezca el concepto de masa.
- 2.- Defina el Kilogramo Patrón.
- 3.- Defina el concepto de Fuerza.
- 4.- Defina el Newton.
- 5.- Establezca las tres Leyes de Newton.
- 6.- Defina el peso de un cuerpo.
- 7.- Defina la Fuerza de Fricción.
- 8.- Explique el método experimental por el cual se obtiene el Coeficiente de Fricción Estático.
- 9.- ¿Un cuerpo puede tener diferentes pesos a pesar de no variar su masa?
- 10.- ¿Un cuerpo puede tener masa y no tener peso? ¿Puede tener peso y no tener masa?

Problemas

1. Calcule los valores de las tensiones en las cuerdas que sujetan el bloque mostrado en la figura 3.17.



A

Figura 3.17

Sol. $T_1 = 238.35 \text{ N}$ y $T_2 = 311.14 \text{ N}$.

2. Calcule los valores de las tensiones en las cuerdas que sujetan el bloque mostrado en la figura 3.18.

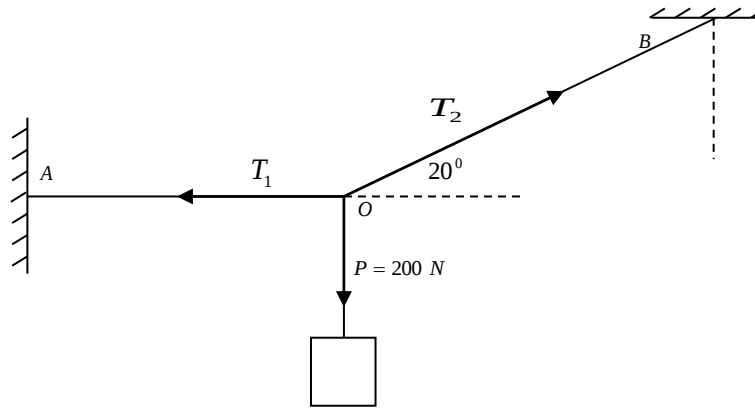


Figura 3.18

3. Sol. $T_1 = 549.49 \text{ N}$ y $T_2 = 584.76 \text{ N}$.

4. Calcule los valores de las tensiones en las cuerdas que sujetan el bloque mostrado en la figura 3.19.

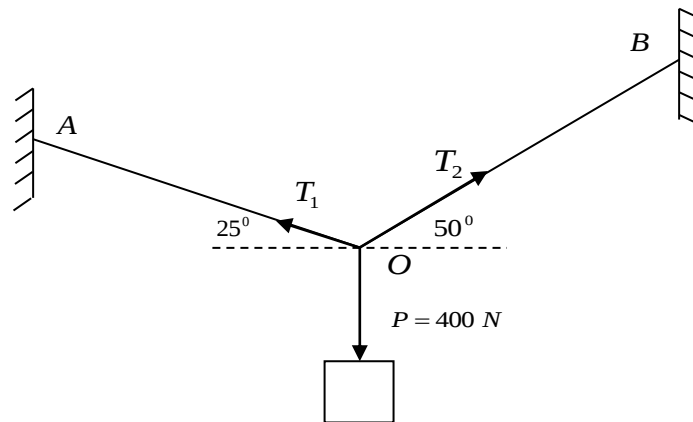


Figura 3.19

Sol. $T_1 = 266.19 \text{ N}$ y $T_2 = 375.31 \text{ N}$.

5. Encuentre la tensión en la cuerda en la figura 3.3 si la masa del bloque es igual a $m = 50 \text{ kg}$.
Sol. $T = 490 \text{ N}$.
6. Si la tensión en la cuerda de la figura 3.3 es igual a $T = 65 \text{ N}$, calcule la masa del bloque que está suspendida.

Sol. $m = 6.63 \text{ kg}$.

7. Encuentre la tensión en la cuerda en la figura 3.4 si la masa del bloque es igual a $m = 50 \text{ kg}$.

Sol. $T = 245 \text{ N}$.

8. Si la tensión en la cuerda de la figura 3.4 es igual a $T = 65 \text{ N}$, calcule la masa del bloque que está suspendida.

Sol. $m = 13.27 \text{ kg}$.

9. Encuentre la tensión en la cuerda en la figura 3.5 si la masa del bloque es igual a $m = 50 \text{ kg}$.

Sol. $T = 61.25 \text{ N}$.

10. Si la tensión en la cuerda de la figura 3.5 es igual a $T = 65 \text{ N}$, calcule la masa del bloque que está suspendida.

Sol. $m = 53.06 \text{ kg}$.

11. En una máquina de Atwood las masas de los bloques son de $m_1 = 30 \text{ kg}$ y $m_2 = 15 \text{ kg}$, encuentre la aceleración con la que se moverán los bloques y la tensión en la cuerda.

Sol. $a = 3.27 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y $T = 196 \text{ N}$.

12. En una máquina de Atwood la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y la tensión en la cuerda es de $T = 60 \text{ N}$, calcule las masas de los bloques.

Sol. $m_1 = 21.43 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y $m_2 = 3.57 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

13. En una máquina de Atwood la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y la masa más grande es de $m_1 = 45 \text{ kg}$, calcule la masa del bloque restante y la tensión en la cuerda.

Sol. $T = 216 \text{ N}$ y $m_2 = 14.59 \text{ kg}$.

14. En una máquina de Atwood la tensión en la cuerda es de $T = 50 \text{ N}$ y la masa del bloque mayor es de $m_1 = 30 \text{ kg}$, calcule la aceleración con la que se moverán los bloques y la masa del bloque restante.

Sol. $a = 8.13 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y $m_2 = 2.79 \text{ kg}$.

15. En una máquina de Atwood la tensión en la cuerda es de $T = 60 \text{ N}$ y la masa del bloque menor es de $m_2 = 5 \text{ kg}$, calcule la aceleración con la que se moverán los bloques y la masa del bloque restante.

Sol. $a = 2.2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y $m_1 = 7.89 \text{ kg}$.

16. En una máquina de Atwood la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y la masa del bloque menor es de $m_2 = 6 \text{ kg}$, calcule la tensión en la cuerda y la masa del bloque restante.

Sol. $T = 88.8 \text{ N}$ y $m_1 = 18.5 \text{ kg}$.

17. En un arreglo como el que se muestra en la figura 3.7, la masa del bloque que se encuentra sobre el plano es de $m_1 = 30 \text{ kg}$ y la que se encuentra suspendida es de $m_2 = 2 \text{ kg}$. Encuentre la aceleración con la que se moverán los bloques y la tensión en la cuerda.

Sol. $a = 0.6125 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y $T = 18.38 \text{ N}$.

18. En un arreglo como el que se muestra en la figura 3.7, la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y la masa del bloque que se encuentra sobre el plano horizontal es de $m_1 = 35 \text{ kg}$. Encuentre la masa del bloque restante y la tensión en la cuerda.

Sol. $T = 245 \text{ N}$ y $m_2 = 87.5 \text{ kg}$.

19. En un arreglo como el que se muestra en la figura 3.7, la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 3 \frac{m}{s^2}$ y la masa del bloque que se encuentra suspendida es de $m_2 = 15 \text{ kg}$. Encuentre la masa del bloque restante y la tensión en la cuerda.

Sol. $T = 102 \text{ N}$ y $m_1 = 34 \text{ kg}$.

20. En un arreglo como el que se muestra en la figura 3.7, la tensión en la cuerda que une a los bloques es de $T = 50 \text{ N}$ y la masa del bloque que se encuentra sobre el plano horizontal es de $m_1 = 30 \text{ kg}$. Encuentre la masa del bloque restante y la aceleración con la que se moverán los bloques.

Sol. $a = 1.67 \frac{m}{s^2}$ y $m_2 = 6.15 \text{ kg}$.

21. En un arreglo como el que se muestra en la figura 3.7, la tensión en la cuerda que une a los bloques es de $T = 20 \text{ N}$ y la masa del bloque que se encuentra suspendida es de $m_2 = 30 \text{ kg}$. Encuentre la masa del bloque restante y la aceleración con la que se moverán los bloques.

Sol. $a = 9.13 \frac{m}{s^2}$ y $m_1 = 2.19 \text{ kg}$.

22. En un arreglo como el que se muestra en la figura 3.7, la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 6.5 \frac{m}{s^2}$ y la tensión en la cuerda que une los bloques es de $T = 37 \text{ N}$. Encuentre las masas de ambos bloques.

Sol. $m_1 = 5.69 \text{ kg}$ y $m_2 = 11.21 \text{ kg}$.

23. En un arreglo como el que se muestra en la figura 3.8, la masa del bloque que se encuentra sobre el plano es de $m_1 = 25 \text{ kg}$ y la que se encuentra suspendida es de $m_2 = 15 \text{ kg}$. Si el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.1$, encuentre la aceleración con la que se moverán los bloques y la tensión en la cuerda.

Sol. $a = 3.07 \frac{m}{s^2}$ y $T = 101.17 \text{ N}$.

24. En un arreglo como el que se muestra en la figura 3.8, la masa del bloque que se encuentra sobre el plano es de $m_1 = 15 \text{ kg}$ y la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 6 \frac{m}{s^2}$. Si el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.1$, encuentre la tensión en la cuerda que une a los bloques y la masa del bloque restante.

Sol. $m_2 = 27.55 \text{ kg}$ y $T = 104.7 \text{ N}$.

25. En un arreglo como el que se muestra en la figura 3.8, la masa del bloque que se encuentra suspendida es de $m_2 = 25 \text{ kg}$ y la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 4 \frac{m}{s^2}$. Si el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.1$, encuentre la tensión en la cuerda que une a los bloques y la masa del bloque restante.

Sol. $m_1 = 29.12 \text{ kg}$ y $T = 145.0 \text{ N}$.

26. En un arreglo como el que se muestra en la figura 3.8, la masa del bloque que se encuentra suspendida es de $m_2 = 40 \text{ kg}$ y la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 4 \frac{m}{s^2}$. Si la masa del bloque que se encuentra sobre la superficie es igual a $m_1 = 10 \text{ kg}$ encuentre la tensión en la cuerda que une los bloques y el coeficiente de fricción.

Sol. $\mu = 1.96$ y $T = 232.4 \text{ N}$.

27. En un arreglo como el que se muestra en la figura 3.8 la masa del bloque que se encuentra suspendida es de $m_2 = 30 \text{ kg}$ y la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 2 \frac{m}{s^2}$. Si el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.1$, encuentre la tensión en la cuerda que une ambos bloques y la masa del bloque que se encuentra sobre la superficie horizontal.

Sol. $m_1 = 78.52 \text{ kg}$ y $T = 234 \text{ N}$.

28. En un arreglo como el que se muestra en la figura 3.8, la masa del bloque que se encuentra sobre la superficie horizontal es de $m_1 = 15 \text{ kg}$ y la aceleración con la que se mueven los bloques es

de $a = 2 \frac{m}{s^2}$. Si la tensión en la cuerda que une los bloques es de $T = 80 \text{ N}$, encuentre el coeficiente de fricción y la masa del bloque que se encuentra suspendida.

Sol. $\mu = 0.340$ y $m_2 = 10.26 \text{ kg}$.

29. En un arreglo como el que se muestra en la figura 3.8, la tensión en la cuerda que une los bloques es de $T = 50 \text{ N}$, la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 4 \frac{m}{s^2}$. Si el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.2$, encuentre las masas de los bloques.

Sol. $m_1 = 8.39 \text{ kg}$ y $m_2 = 8.62 \text{ kg}$.

30. Calcule la aceleración con la que se deslizará un bloque si el ángulo de inclinación en un plano inclinado es de $\theta = 70^\circ$ y el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.4$.

Sol. $a = 7.87 \frac{m}{s^2}$.

31. Calcule el coeficiente de fricción entre el plano inclinado y un bloque que se encuentre sobre él si la aceleración con la que se desliza el bloque es de $a = 5.0 \frac{m}{s^2}$ y el ángulo de inclinación es de $\theta = 60^\circ$.

Sol. $\mu = 0.711$.

32. Calcule el ángulo por el cual un bloque se mueve sobre un plano inclinado si la aceleración con la que se desliza es de $a = 4 \frac{m}{s^2}$ y el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.5$.

Sol. $\theta = 48^\circ$.

33. Si el ángulo con el cual comienza a deslizarse un bloque sobre un plano inclinado es de $\theta = 40^\circ$. Calcule el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano inclinado.

Sol. $\mu = 0.839$.

34. Si el coeficiente de fricción entre un plano inclinado y el bloque que se encuentra sobre él es de $\mu = 1.2$, encuentre el ángulo por el cual comienza a deslizarse.

Sol. $\theta = 50.19^\circ$.

35. Calcule la tensión y la aceleración con la que se moverá el bloque de masa m_1 mostrado en la figura 3.11, si el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.3$, las masas de los bloques son $m_1 = 15 \text{ kg}$ y $m_2 = 5 \text{ kg}$, y la fuerza con la que se jala el bloque de masa m_1 es igual a $F = 300 \text{ N}$.

Sol. $a = 15.1 \frac{m}{s^2}$ y $T = 14.7 \text{ N}$.

36. Calcule las masas de los bloques mostrados en la figura 3.11 si la tensión en la cuerda es de $T = 30 \text{ N}$, el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.5$, la aceleración con la que se mueve el bloque de masa m_1 es de $a = 2 \frac{m}{s^2}$ y la fuerza con que es tirado el bloque de masa m_1 es de $F = 500 \text{ N}$.

Sol. $m_2 = 6.12 \text{ kg}$ y $m_1 = 63.77 \text{ kg}$.

37. Calcule el coeficiente de fricción y la tensión en la cuerda mostrados en la figura 3.11 si las masas de los bloques son $m_1 = 15 \text{ kg}$, $m_2 = 10 \text{ kg}$, la aceleración es de $a = 1 \frac{m}{s^2}$ y la fuerza es de $F = 250 \text{ N}$.

Sol. $\mu = 0.685$ y $T = 67.14 \text{ N}$.

38. Calcule la tensión en la cuerda y la fuerza con la que se jala el bloque de masa m_1 mostrado en la figura 3.11, si las masas de los bloques son $m_1 = 30 \text{ kg}$, $m_2 = 15 \text{ kg}$, el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.4$, la aceleración con la que se mueve el bloque m_1 es de $a = 4 \frac{m}{s^2}$.

Sol. $T = 58.8 \text{ N}$ y $F = 355.2 \text{ N}$.

39. Calcule el coeficiente de fricción y la aceleración con la que se moverá el bloque de masa m_1 mostrado en la figura 3.11, si tensión es de $T = 20 \text{ N}$, las masas de los bloques son $m_1 = 25 \text{ kg}$ y $m_2 = 15 \text{ kg}$ y la fuerza con la que son jalados es igual a $F = 300 \text{ N}$.

Sol. $\mu = 0.136$ y $a = 9.06 \frac{m}{s^2}$.

40. Calcule la aceleración y la tensión con la que se moverán los bloques mostrados en la figura 3.12, si el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.4$, las masas de los bloques son $m_1 = 20 \text{ kg}$ y $m_2 = 15 \text{ kg}$ y la fuerza con la que son jalados es igual a $F = 500 \text{ N}$.

Sol. $a = 7.00 \frac{m}{s^2}$ y $T = 163.88 \text{ N}$.

41. Calcule las masas de los bloques mostrados en la figura 3.12 si la tensión en la cuerda es de $T = 50 \text{ N}$, el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.5$, la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 2 \frac{m}{s^2}$ y la fuerza con que es tirado el bloque es de $F = 500 \text{ N}$.

Sol. $m_2 = 7.25 \text{ kg}$ y $m_1 = 54.92 \text{ kg}$.

42. Calcule el coeficiente de fricción y la tensión en la cuerda mostrados en la figura 3.12 si las masas de los bloques son $m_1 = 25 \text{ kg}$, $m_2 = 15 \text{ kg}$, la aceleración es de $a = 3 \frac{m}{s^2}$ y la fuerza es de $F = 250 \text{ N}$.

Sol. $\mu = 0.189$ y $T = 72.78 \text{ N}$.

43. Calcule la tensión en la cuerda y la fuerza con la que se jala el bloque de masa m_1 mostrado en la figura 3.12, si las masas de los bloques son $m_1 = 20 \text{ kg}$, $m_2 = 15 \text{ kg}$, el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.5$, la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 3 \frac{m}{s^2}$.

Sol. $T = 118.5 \text{ N}$ y $F = 423.5 \text{ N}$.

44. Calcule las fuerzas que actúan en cada bloque mostrado en la figura 3.13, si el coeficiente de fricción es de $\mu = 0.4$, la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 2 \frac{m}{s^2}$ y la masa de los bloques es de $m_1 = 15 \text{ kg}$, $m_2 = 25 \text{ kg}$ y $m_3 = 35 \text{ kg}$.

Sol. $F = 444 \text{ N}$, $F_1 = 355.2 \text{ N}$ y $F_2 = 207.2 \text{ N}$.

45. Calcule la fuerza F y el coeficiente de fricción mostrados en la figura 3.13, si la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 6 \frac{m}{s^2}$, las masas de los bloques son $m_1 = 15 \text{ kg}$, $m_2 = 25 \text{ kg}$ y $m_3 = 35 \text{ kg}$, y la fuerza entre el bloque 2 y 3 es $F_2 = 200 \text{ N}$.

Sol. $F = 428.57 \text{ N}$ y $\mu = 0.379$.

46. Calcule la fuerza F y la aceleración con la que se moverán los bloques mostrados en la figura 3.13, si el coeficiente de fricción que existe entre la superficie horizontal y los bloques es de $\mu = 0.3$, las masas de los bloques son $m_1 = 5 \text{ kg}$, $m_2 = 25 \text{ kg}$ y $m_3 = 20 \text{ kg}$, la fuerza entre el bloque 2 y 3 es $F_2 = 200 \text{ N}$.

Sol. $F = 500 \text{ N}$ y $a = 7.06 \frac{m}{s^2}$.

47. Calcule las masas m_1 y m_3 , y el coeficiente de fricción que existe entre el bloque de masa m_2 y la superficie horizontal mostrados en la figura 3.14, si las tensiones en las cuerdas son iguales a $T_1 = 20 \text{ N}$ y $T_2 = 60 \text{ N}$, la aceleración es de $a = 2 \frac{m}{s^2}$ y la masa del bloque 2 es igual a $m_2 = 4 \text{ kg}$.

Sol. $\mu = 0.816$, $m_1 = 1.69 \text{ kg}$ y $m_3 = 7.69 \text{ kg}$.

48. Calcule la aceleración con la que se moverán los bloques y la tensión en la cuerda mostrados en la figura 3.15, si las masas de los bloques son $m_1 = 15 \text{ kg}$, $m_2 = 30 \text{ kg}$, los coeficientes de fricción son $\mu_1 = 0.2$ y $\mu_2 = 0.3$ y la fuerza con la que se mueven es $F = 300 \text{ N}$.

Sol. $a = 4.05 \frac{m}{s^2}$ y $T = 109.8 \text{ N}$.

49. Calcule la tensión y la fuerza que se aplica al bloque de masa m_2 mostrado en la figura 3.15, si la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 5 \frac{m}{s^2}$, las masas de los bloques son $m_1 = 40 \text{ kg}$, $m_2 = 60 \text{ kg}$ y los coeficientes de fricción son $\mu_1 = 0.2$ y $\mu_2 = 0.3$.

Sol. $T = 278.4 \text{ N}$ y $F = 754.8 \text{ N}$.

50. Calcule la tensión y la masa m_2 del bloque mostrado en la figura 3.15, si la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 4 \frac{m}{s^2}$, la fuerza que tira del bloque de masa m_2 es igual a $F = 200 \text{ N}$, si la masa $m_1 = 10 \text{ kg}$ y los coeficientes de fricción son $\mu_1 = 0.2$ y $\mu_2 = 0.3$.

Sol. $T = 59.6 \text{ N}$ y $m_2 = 20.23 \text{ kg}$.

51. Calcule la tensión y la masa m_1 del bloque mostrado en la figura 3.15, si la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 3 \frac{m}{s^2}$, la fuerza que tira del bloque de masa m_2 es de $F = 300 \text{ N}$, la masa $m_2 = 40 \text{ kg}$ y los coeficientes de fricción son $\mu_1 = 0.2$ y $\mu_2 = 0.3$.

Sol. $T = 62.4 \text{ N}$ y $m_1 = 12.58 \text{ kg}$.

52. Calcule las masas de los bloques mostrados en la figura 3.15, si la aceleración con la que se mueven los bloques es de $a = 6 \frac{m}{s^2}$, la fuerza que tira del bloque de masa m_2 es de $F = 300 \text{ N}$, la tensión en la cuerda es $T = 100 \text{ N}$ y los coeficientes de fricción son $\mu_1 = 0.2$ y $\mu_2 = 0.3$.

Sol. $m_1 = 12.56 \text{ kg}$ y $m_2 = 22.37 \text{ kg}$.

53. Calcule la tensión en la cuerda que sujeta un bloque de $m = 500 \text{ kg}$ de masa mostrado en la figura 3.16, si: a).- El bloque se encuentra en reposo, b).- El bloque se mueve hacia arriba o hacia abajo con velocidad constante, c).- El bloque se mueve hacia arriba con una aceleración de $a = 9 \frac{m}{s^2}$ y d).- El bloque se mueve hacia abajo con una aceleración de $a = 5 \frac{m}{s^2}$.

Sol. a).- $T = 4\,900 \text{ N}$, b).- $T = 4\,900 \text{ N}$, c).- $T = 9\,400 \text{ N}$ y d).- $T = 2\,400 \text{ N}$.

54. Calcule la aceleración con la que subirá el bloque mostrado en la figura 3.16, si la tensión en la cuerda es de $T = 2\,000 \text{ N}$ y su masa es de $m = 100 \text{ kg}$.

Sol. $a = 10.2 \frac{m}{s^2}$

55. Calcule la aceleración con la que bajará el bloque mostrado en la figura 3.16, si la tensión en la cuerda es de $T = 400 \text{ N}$ y su masa es de $m = 100 \text{ kg}$.

Sol. $a = 5.8 \frac{m}{s^2}$.

4 TRABAJO Y ENERGÍA

4.1 Concepto de Trabajo y Energía

Los cambios en el estado de un cuerpo están relacionados con las fuerzas y con el tiempo durante el cual se ejercen. Sin embargo, se pueden aplicar varias fuerzas a un cuerpo sin que experimente un cambio de estado, aunque se apliquen por un tiempo prolongado. En este caso las fuerzas que influyen sobre el cuerpo están equilibradas. Sin embargo, cuando las fuerzas que actúan sobre un cuerpo no estén equilibradas, se produce un cambio en su estado, modificando su velocidad. El cambio de velocidad de un cuerpo es debido a que se ha movido ya sea traslacional y/o rotacionalmente. Cuando el cuerpo se mueve en forma traslacional se ha desplazado una cierta distancia. El producto de la

distancia por la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento del cuerpo se le conoce como Trabajo. En todos los casos en los que se realiza un trabajo intervienen dos factores: la distancia que se desplaza y la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento del cuerpo. Consideremos el caso del movimiento de un cuerpo en línea recta horizontal y que es accionado por una fuerza que es constante, formando un ángulo con respecto a la dirección del desplazamiento del cuerpo. La figura 4.1 muestra esta situación.

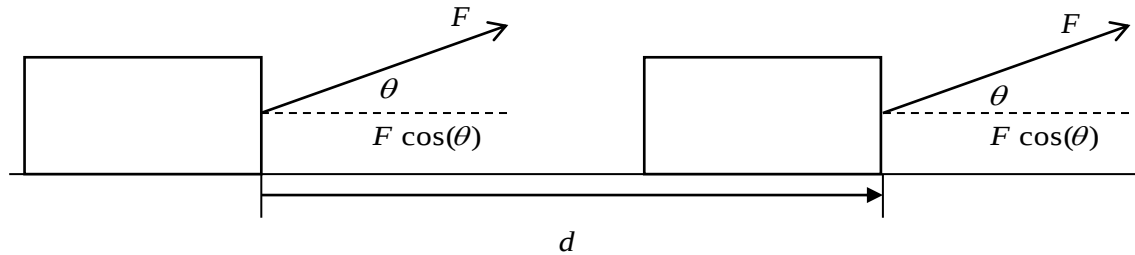


Figura 4.1

Como se muestra en la figura, el cuerpo se ha desplazado una distancia d por medio de la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento del cuerpo. En consecuencia, el trabajo realizado por la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento del cuerpo, es igual a:

$$W = F d \cos \theta \quad 4.1$$

La componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento del cuerpo es igual a $F \cos \theta$. Para calcular el trabajo realizado por esta fuerza es necesario conocer su componente en la dirección en la que se mueve el cuerpo, ya que es la que provoca su movimiento. En consecuencia, ninguna fuerza que sea perpendicular al desplazamiento del cuerpo produce un trabajo. Así, la componente de la fuerza en la dirección vertical ($F \sin \theta$) no realiza ningún trabajo debido a que es perpendicular al movimiento del cuerpo.

Consideremos el sistema de fuerzas que actúan sobre el cuerpo mostrado en la figura 4.2.

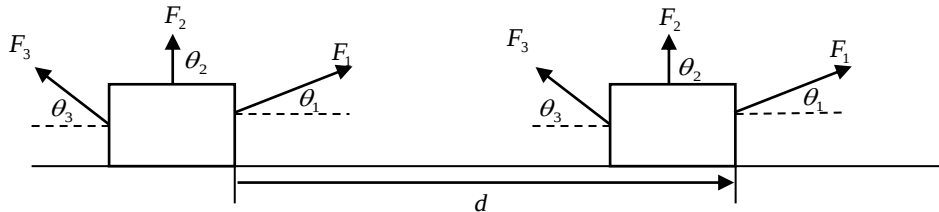


Figura 4.2

El trabajo total que se realiza sobre el cuerpo es igual a la suma de los trabajos realizados por cada una de las componentes de las fuerzas en la dirección del movimiento del cuerpo. Así, matemáticamente este enunciado se puede representar por medio de la siguiente ecuación:

$$W_T = \sum_{i=1}^3 W_i = W_1 + W_2 + W_3 = F_1 d \cos \theta_1 + F_2 d \cos \theta_2 + F_3 d \cos \theta_3 =$$

$$W_T = F_1 d \cos \theta_1 + 0 - F_3 d \cos \theta_3 = F_1 d \cos \theta_1 - F_3 d \cos \theta_3$$

$$W_T = [F_1 \cos \theta_1 - F_3 \cos \theta_3] d$$

Note que el segundo término de la ecuación es igual a cero, ya que la fuerza es perpendicular al desplazamiento del cuerpo. De igual forma, observe que el tercer término viene antecedido por un signo menos, el cual nos indica que la fuerza es contraria a la dirección del desplazamiento del cuerpo. En este caso el trabajo producido por esta fuerza es negativo. Así, el trabajo total es igual a la suma de los trabajos realizados por cada una de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Para este ejemplo, hemos considerado que las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y el ángulo que forman con la trayectoria de

desplazamiento, son constantes. Generalmente esta situación no se cumple, es decir, las magnitudes y las direcciones de las fuerzas cambian con el tiempo. Esta situación no se abordará ya que no es el propósito de estos apuntes.

Por la segunda ley de Newton, vemos que la fuerza total con la que se mueve un objeto es igual a:

$$F = m a$$

En consecuencia, el trabajo realizado sobre un cuerpo es igual a:

$$W_T = F_T d = m a d = m \left[\frac{v^2 - v_0^2}{2} \right]$$

Donde: $a d = \frac{v^2 - v_0^2}{2}$

Entonces el trabajo realizado por la fuerza F_T es igual a:

$$W_T = m \frac{v^2 - v_0^2}{2} = \left[\frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} \right] \quad 4.2$$

Al término $m \frac{v^2}{2}$ se le conoce como energía cinética. La energía cinética es la energía que tiene un cuerpo debido a su movimiento. La energía cinética de un cuerpo depende directamente de su masa. A mayor masa, mayor energía cinética. También la energía cinética de un cuerpo depende directamente del cuadrado de su velocidad. Esto quiere decir que si un objeto aumenta al doble la velocidad con la que se mueve, entonces su energía cinética aumentará cuatro veces. Si aumenta tres veces la velocidad, su energía cinética aumentará nueve veces. De esta forma:

“El trabajo que se realice sobre un cuerpo es igual al cambio de su energía cinética”

Este resultado indica que cualquiera que sea la fuerza y la trayectoria seguida por el cuerpo, el valor del trabajo efectuado por la fuerza es igual a la diferencia entre las magnitudes de la energía cinética evaluadas al final y al comienzo del movimiento. En el caso del bloque del ejemplo anterior, al recorrer la distancia d , la velocidad del cuerpo será v y su energía cinética, $m \frac{v^2}{2}$. El cambio de energía cinética depende del trabajo realizado. A mayor trabajo, mayor cambio de energía cinética. Es por ello que se utiliza mayor trabajo para detener un camión que un auto si ambos llevan la misma velocidad y la masa del auto es menor que la del camión. Es la clase de trabajo que se requiere para aumentar o disminuir la velocidad de un cuerpo.

Las unidades del trabajo y, a su vez de la energía cinética, son consecuencia de la combinación del producto de las unidades de fuerza por las unidades de distancia. Para el sistema internacional es el producto del Newton por metro, que da como consecuencia N m. A esta unidad se le conoce con el nombre de Joule. Se hace un Joule de trabajo cuando se ejerce una fuerza de 1 N a lo largo de una distancia de 1 m.

En resumen, el trabajo que se realiza sobre un cuerpo viene acompañado de un cambio de energía. Así, al hablar de trabajo estamos hablando de energía. La energía es la capacidad que tiene un objeto para realizar un trabajo. El trabajo es energía y la energía es trabajo. Ambos son equivalentes.

También se puede realizar trabajo en contra de otra fuerza. Cuando se levanta un objeto, se está realizando un trabajo en contra del peso del cuerpo. Cuando se comprime un resorte se está realizando un trabajo en contra de la fuerza que imprime el resorte. Cuando arrastramos un cuerpo sobre una superficie con fricción, se está realizando un trabajo en contra de la fuerza de fricción. También se está realizando un trabajo sobre una liga al estirla ya que la fuerza que se aplique va en contra de la fuerza que imprime la liga. En todos estos casos la energía queda almacenada en el cuerpo en espera de ser utilizada y no existe un cambio de energía cinética. El cambio de energía cinética va a aparecer cuando sea liberada esa energía almacenada. La energía almacenada en espera de ser liberada se llama energía potencial, porque en ese estado tiene el potencial para realizar un trabajo. Un resorte comprimido o estirado tiene el potencial para hacer trabajo. La liga estirada tiene el potencial para realizar un trabajo. Hay energía potencial en las baterías cargadas, en los alimentos, en la madera, etc. La energía que tienen los cuerpos debido a que se encuentran por arriba de la superficie terrestre se llama energía potencial gravitacional. La superficie de agua que se encuentra en una presa tiene almacenada energía potencial gravitacional la cual puede ser liberada al caer. Esa energía sirve para

mover las aspas del generador para producir electricidad. Al subir de un piso a otro dentro de un edificio, estamos acumulando energía potencial gravitacional.

El peso que tiene un cuerpo es el producto de la masa por la aceleración de la gravedad. Así, el trabajo que se realiza para que un cuerpo lo elevemos desde una altura h_0 hasta una altura h , es igual a:

$$W = m g h - m g h_0 = m g (h - h_0) \quad 4.3$$

Este trabajo es igual al peso que hay que vencer, multiplicado por la distancia que se tiene que elevar. Se tiene que hacer la aclaración de que esta fuerza que se necesita para elevar al cuerpo, es la fuerza mínima. La suma de las dos fuerzas, la del peso y la que se utiliza para levantarlo, es igual a cero. De esta forma el cuerpo se moverá con velocidad constante, por lo que la aceleración del cuerpo será igual a cero. Sobre el cuerpo no se realiza trabajo alguno ya que la fuerza que utilizamos para elevarlo es la misma que su peso. La que realiza trabajo es la fuerza que se utiliza para levantar al cuerpo. De igual forma, el peso también realiza un trabajo pero negativo de tal forma que la suma de ambos trabajos es igual a cero. Cuando dejemos libre al cuerpo, el cuerpo caerá liberando la energía almacenada. Si utilizáramos una fuerza mayor que el peso para elevarlo, observaríamos que el cuerpo sufriría una aceleración ya que la fuerza total que influye sobre el cuerpo es diferente de cero. La fuerza total es igual a la resta de la fuerza con la que sube menos la fuerza del peso. La siguiente figura muestra esta situación:

Este caso sucede en una máquina de Atwood. La tensión en la cuerda que se ejerce en el cuerpo que se mueve hacia arriba es mayor que el peso, provocando que el cuerpo suba con una aceleración diferente de cero. Entonces, el trabajo hecho por una fuerza ejercida sobre un cuerpo puede aumentar su energía potencial o su energía cinética o ambas.

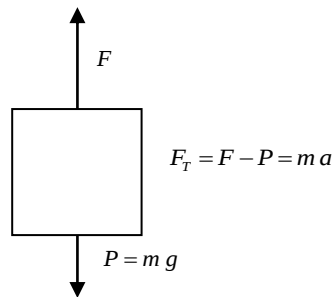


Figura 4.3

Es por esta razón que el cambio de la energía potencial de un cuerpo al levantarlo, es igual al trabajo necesario para efectuar ese desplazamiento a velocidad constante. Si no es así, el trabajo se repartirá entre aumentar la energía potencial y aumentar la energía cinética del cuerpo, como sucede con los bloques de en una máquina de Atwood.

Si hacemos una gráfica de la fuerza mínima que se necesita para levantar un objeto y las alturas de las cuales parte y llega, obtendríamos una gráfica como la mostrada en la figura 4.4.

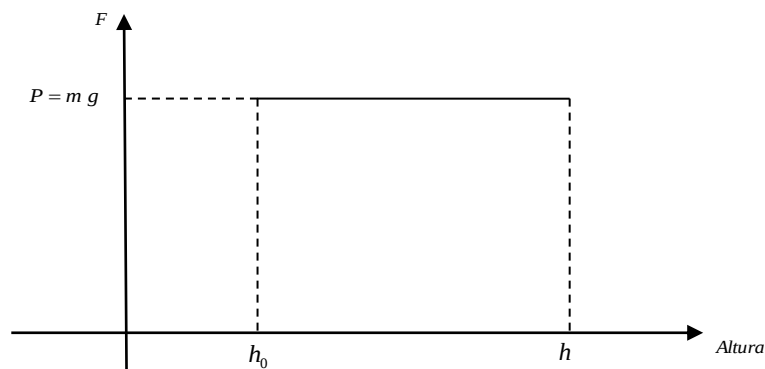


Figura 4.4

Observe que el trabajo que se realiza para subir un cuerpo de masa m desde una altura h_0 hasta una altura h es igual al área bajo la curva que se muestra en la gráfica. De esta forma, generalizando, se puede afirmar que:

“El trabajo realizado por una fuerza es igual al área bajo la curva de la gráfica de la fuerza en función de la distancia en la que se aplica la fuerza”

Supongamos ahora que queremos levantar un objeto hasta una cierta altura. Suponga también que se quiere levantar a través de una rampa. Para conocer el trabajo que se necesita para levantarlo, debemos conocer la fuerza con la que vamos a mover el bloque a velocidad constante y la distancia que tiene que recorrer a través de la rampa. La figura 4.5 muestra esta situación.

Según la figura, el trabajo que realice la fuerza F para que el bloque se levante hasta una altura h siguiendo la trayectoria de la rampa, es igual a la fuerza multiplicada por la distancia que tiene la rampa. Como resultado del análisis que se hizo para conocer la fuerza con la que bajaría el bloque a través de la rampa deslizándose libremente, se llega a que esa fuerza es igual a: $F = m g \sen \theta$. Esta fuerza es la misma para poder mover el bloque hacia arriba siguiendo la trayectoria del plano con una velocidad constante. La distancia que debe recorrer el bloque a través del plano es igual a $d = \frac{h}{\sen \theta}$, como se muestra en la misma figura.

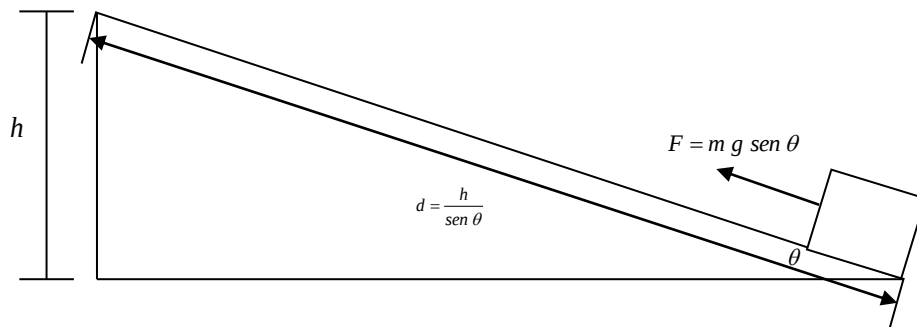


Figura 4.5

El producto de la fuerza por la distancia es igual al trabajo efectuado por la fuerza F multiplicada por la distancia d , es decir:

$$W = F d = m g \sen \theta \frac{h}{\sen \theta} = m g h$$

Que es igual al trabajo que se realiza para levantar el bloque hasta una altura h utilizando una fuerza necesaria para vencer el peso del cuerpo a velocidad constante verticalmente. Este resultado no depende de la inclinación que tenga el plano, ya que algebraicamente se elimina el ángulo en la ecuación que calcula el trabajo que se hace para subir al bloque a través de la rampa o el plano. Cualquiera que sea la inclinación que tenga el plano, el trabajo que se requiera para subir al bloque hasta una altura h es el mismo. De todo esto podemos concluir:

“El trabajo que se realiza para subir un cuerpo hasta una altura determinada y a velocidad constante, no depende de la trayectoria que siga el bloque, sólo depende de la altura a la que llegue”

De esta forma, si subiésemos al bloque a través de una trayectoria como la mostrada en la figura 4.6 y hasta la misma altura h , entonces, según este resultado, el trabajo que se efectúa para subirlo es el mismo que el trabajo se hubiese hecho a través del plano o verticalmente. Analicemos esta situación.

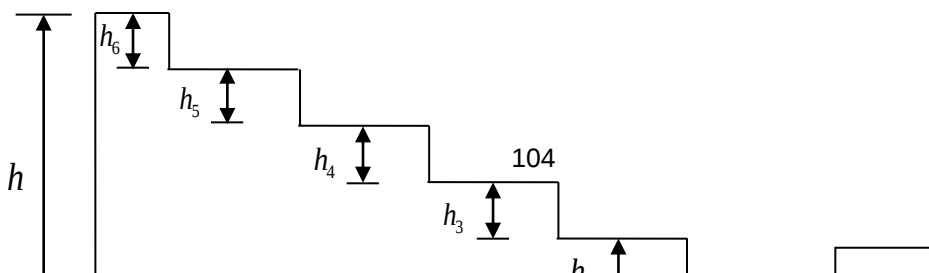


Figura 4.6

Por la ecuación 4.1, que es la que calcula el trabajo, podemos concluir que en las trayectorias por las que el bloque se mueve horizontalmente, el trabajo que se efectúa en esa dirección es igual a cero ya que la fuerza que se utilice para moverlo es perpendicular a la trayectoria seguida por el bloque. Sólo se hace trabajo cuando el cuerpo es subido para pasar de un escalón a otro. El trabajo que se realice para subir el bloque es igual a la suma de los trabajos que se realizan para subir cada escalón, es decir:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + W_6$$

$$W = m g h_1 + m g h_2 + m g h_3 + m g h_4 + m g h_5 + m g h_6$$

$$W = m g (h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6) = m g h$$

Este trabajo es igual al trabajo que se realiza para elevar o levantar el bloque hasta una altura h . Por consiguiente, no importa la trayectoria que se siga para subir un cuerpo hasta una altura determinada; el trabajo es el mismo. De todo esto reiteramos que no importa el camino por el que se desplace un cuerpo de un punto a otro, sólo depende de la altura a la que llegue el cuerpo con respecto a un nivel determinado, por ejemplo el piso.

También podemos afirmar que no importa cuál sea la fuerza que se utilice para mover al bloque horizontalmente. Esta fuerza, al menos, no aumenta la energía potencial del bloque, por eso no realiza un trabajo verticalmente. Podrá realizar un trabajo horizontalmente pero no hace que aumente su energía potencial. Eso es un caso diferente.

También debemos aclarar que, por convención, la energía potencial que tiene un cuerpo a nivel del suelo es igual a cero. Sin embargo esto no es necesariamente cierto, le podemos asignar un determinado valor. Lo que importa es la diferencia de alturas a la que se encuentre el cuerpo ya que solo depende del punto inicial y final en el que se encuentre. Por simplicidad se ha asignado cero a la energía potencial que tenga un cuerpo a nivel del suelo.

Supongamos que ahora el bloque lo queremos elevar a la misma altura pero siguiendo una trayectoria circular como la que se muestra en la figura 4.7.

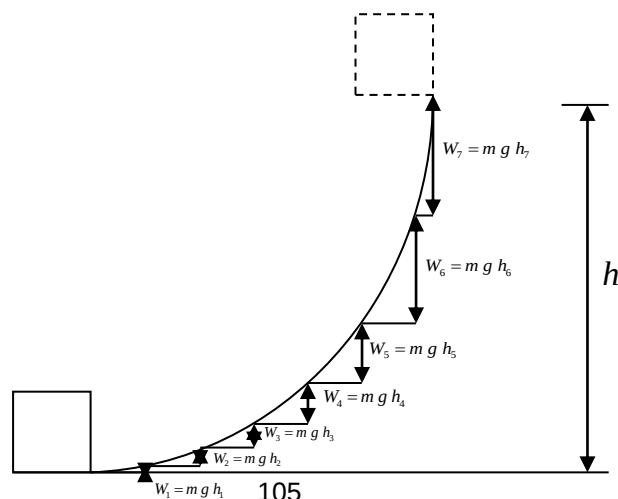


Figura 4.7

Si seguimos la trayectoria que sigue el cuerpo en escalones como se muestra en la figura, el trabajo total que realiza la fuerza para llevar al cuerpo a una altura h , es igual a:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + W_6$$

$$W = m g h_1 + m g h_2 + m g h_3 + m g h_4 + m g h_5 + m g h_6$$

$$W = m g (h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + h_6) = m g h$$

En este caso las alturas en cada escalón son diferentes, pero la suma de ellas es igual a h . Si hiciéramos los escalones un poco más pequeños, la trayectoria seguida por el bloque sería muy parecida a la trayectoria circular. En consecuencia, se realiza el mismo trabajo para elevar el cuerpo hasta una altura h independientemente de la trayectoria que siga. Incluso si el cuerpo pasa por una altura mayor pero su punto final es la altura h , el trabajo realizado sigue siendo el mismo. La figura 4.8 muestra esta situación.

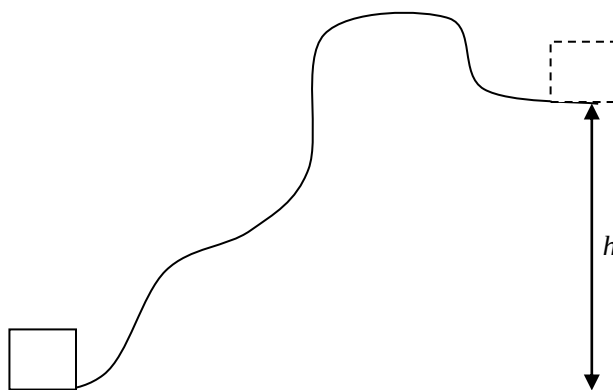


Figura 4.8

El trabajo hecho sobre el bloque sigue siendo $W = m g h$ aunque antes de llegar a esa altura llegase a una altura mayor. Finalmente, el trabajo que se realiza sobre un cuerpo para elevarlo a una cierta altura, sólo depende del punto del que parte y al que llega.

Cuando el trabajo que se realiza sobre un cuerpo sólo depende del punto donde parte y del punto a donde llega, se le llama fuerzas conservativas. Por consecuencia, el trabajo efectuado por las fuerzas conservativas es independiente de la trayectoria seguida por el cuerpo. En particular, si la trayectoria es cerrada, de modo que el punto final coincide con el inicial, entonces el trabajo realizado en esa trayectoria cerrada es cero. Lo que significa que en parte de la trayectoria el trabajo es positivo y en otra, negativo pero de igual en magnitud, dando un resultado neto nulo. La siguiente figura muestra que el trabajo realizado por la fuerza para que el bloque pase por los diferentes puntos de la trayectoria (ABCDEA), es igual a cero.

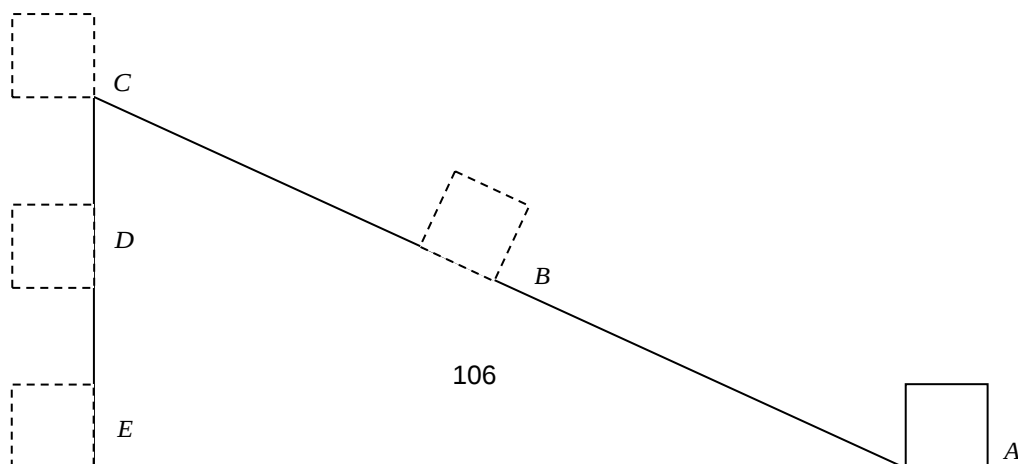


Figura 4.9

Como hemos dicho, cuando subimos un cuerpo de una altura h_0 a una altura h por medio de una fuerza F constante vertical, el trabajo que se realiza es igual a:

$$W = m g (h - h_0)$$

De esta forma, el cuerpo ha almacenado energía potencial. Si se dejara soltar, el cuerpo caería liberando esa energía. Esa energía se irá convirtiendo en energía cinética ya que conforme vaya cayendo su velocidad aumentaría. De esta forma, el cuerpo experimentaría un cambio de energía potencial en energía cinética. Así, la energía no se crea ni se destruye, sólo se transforma. Utilizando este principio podemos afirmar que conforme una energía disminuye la otra aumenta. Suponiendo esto y además suponiendo que el trabajo que se realiza sobre un cuerpo es igual al cambio en la energía cinética, podemos afirmar que:

$$W = m g (h - h_0) = -\left(\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2\right) \quad 4.4$$

El signo negativo nos indica que cuando una cantidad disminuye, la otra aumenta. Reordenando términos, se tiene:

$$m g h + \frac{1}{2} m v^2 = m g h_0 + \frac{1}{2} m v_0^2 \quad 4.5$$

A la cantidad $m g h + \frac{1}{2} m v^2$ o $m g h_0 + \frac{1}{2} m v_0^2$ se le conoce como energía total del cuerpo. Esto es, la energía total de una partícula en caída libre, es igual a la suma de la energía cinética más la potencial. En consecuencia:

“Cuando las fuerzas son conservativas, la energía total de un cuerpo permanece constante”

En otras palabras, la energía total de un cuerpo en caída libre, se conserva. Debemos hacer notar que esta ecuación no está restringida al movimiento vertical; es válida para el movimiento de un proyectil sin que sea afectado por la fricción con el aire u otros factores que influyan en su movimiento. Debe notarse que, para una energía total dada, la magnitud de la velocidad en un punto dado está determinada por la ecuación 4.5.

Ejemplo 4.1

Consideremos un cuerpo que se encuentra a $h_0 = 10 \text{ m}$ de altura sobre el piso y que se deja soltar. Calculemos la velocidad con la que se moverá al encontrarse a $h = 5 \text{ m}$ sobre el piso y justo antes de llegar a él.

Solución:

Utilizando la ecuación 4.5 nos encontramos que: $h_0 = 10 \text{ m}$, $v_0 = 0$ y $h = 5 \text{ m}$. No es necesario conocer la masa del cuerpo ya que no se utiliza porque no estamos calculando su energía. De igual forma, la velocidad inicial del cuerpo es igual a cero porque se deja caer. En consecuencia:

$$m g h + \frac{1}{2} m v^2 = \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) (10 \text{ m}) + \frac{1}{2} (0) = \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) (5 \text{ m}) + \frac{1}{2} v^2$$

Despejando v , se tiene:

$$v = \sqrt{2 \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) (5 \text{ m})} = 9.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Para cuando llegue al suelo, su velocidad sería de:

$$m g h + \frac{1}{2} m v^2 = \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) (10 \text{ m}) + \frac{1}{2} (0) = \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) (0) + \frac{1}{2} v^2$$

Despejando v , se tiene:

$$v = \sqrt{2 \left(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) (10 \text{ m})} = 14.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Consideremos ahora que el cuerpo, que se encuentra a $h_0 = 10 \text{ m}$ de altura sobre el piso, se lanza hacia arriba con una velocidad de $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calculemos de nuevo la velocidad con la que se moverá al encontrarse a $h = 5 \text{ m}$ sobre el piso y justo antes de llegar a él.

Utilizando la ecuación 4.5 nos encontramos que: $h_0 = 10 \text{ m}$, $v_0 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $h = 5 \text{ m}$. Como anteriormente se dijo, no es necesario conocer la masa del cuerpo ya que no se utiliza porque no estamos calculando su energía. En consecuencia:

$$g h_0 + \frac{1}{2} m v_0^2 = (9.81 \text{ m/s}^2)(10 \text{ m}) + \frac{1}{2} (5 \text{ m/s})^2 = (9.81 \text{ m/s}^2) (5 \text{ m}) + \frac{1}{2} v^2$$

Como el cuerpo es lanzado para arriba, la velocidad inicial es igual a $v_0 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Esta velocidad es positiva por lanzarse hacia arriba.

Despejando v , se tiene:

$$v = \sqrt{2 (9.81 \text{ m/s}^2) (5 \text{ m}) + (5 \text{ m/s})^2} = 11.09 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

que es la velocidad que lleva el cuerpo a la altura de 5 metros.

De igual forma, la velocidad que lleva el cuerpo al llegar al piso es de:

$$v = \sqrt{2 (9.81 \text{ m/s}^2) (10 \text{ m}) + (5 \text{ m/s})^2} = 14.87 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Si en vez de lanzar el cuerpo hacia arriba, se lanzara hacia abajo, ¿con qué velocidad llegaría al suelo o a la altura de 5 metros?

Ejemplo 4.2

Supongamos que 10 kg de masa es soltada desde un avión que vuela horizontalmente a $\frac{75\text{m}}{\text{s}}$. Si el avión está a 100 m de altura, calcular a).- la energía cinética inicial de la bomba, b).- su energía potencial inicial, c).- su energía total, d).- su velocidad al llegar al suelo y e).- su energía potencial y cinética después de 2 segundos de haber sido soltada.

Solución:

La energía cinética inicial de la bomba es igual a:

$$E_c = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} (10 \text{ kg}) (75 \text{ m/s})^2 = 28 \ 125 \text{ J}$$

La energía potencial de la bomba en el momento de ser soltada es igual a:

$$E_p = m g h_0 = (10 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (100 \text{ m}) = 9 \ 800 \text{ J}$$

En consecuencia, la energía total de la bomba es igual a:

$$E_T = E_c + E_p = 28 \ 125 \text{ J} + 9 \ 800 \text{ J} = 37 \ 925 \text{ J}$$

La velocidad de la bomba al momento de llegar al suelo, se calcula suponiendo que la energía potencial del proyectil en ese punto es igual a cero y que la energía total se conserva, es decir:

$$E_c = E_T - E_p = E_T = 37 \ 925 \text{ J}$$

En consecuencia, se tiene:

$$v = \sqrt{\frac{2 (37 \ 925 \text{ J})}{10 \text{ kg}}} = 87.09 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La velocidad del cuerpo a los dos segundos de iniciado el movimiento, se calcula utilizando la ecuación de caída libre.

$$v_y = v_{0y} + g t = \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (2 \text{ s}) = 19.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

En consecuencia, la rapidez que lleva la bomba a los dos segundos es igual a:

$$v = \sqrt{(75 \text{ m/s})^2 + (19.6 \text{ m/s})^2} = 77.51 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

De esta forma, la energía cinética que lleva el cuerpo a los dos segundos es:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} (10 \text{ kg}) (77.51 \text{ m/s})^2 = 30 \ 039.00 \text{ J}$$

En consecuencia, La energía potencial del proyectil es igual a la resta de la energía total menos la energía cinética, es decir:

$$E_p = E_T - E_c = 37\,925\text{ J} - 30\,030\text{ J} = 7\,885.99\text{ J}$$

Por lo tanto, la altura a la que se encuentra el proyectil después de dos segundos de iniciado el movimiento, es igual a:

$$h = \frac{7\,885.99\text{ J}}{\left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(10\text{ kg})} = 80.46\text{ m}$$

Ejemplo 4.3

Supongamos que se lanza un proyectil con una rapidez inicial de $v_0 = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, formando un ángulo de $\theta_0 = 30^\circ$. Calcule la rapidez del proyectil a una altura de 20 metros.

Solución:

Utilizando la ecuación 4.5 correspondiente a la conservación de la energía, encontramos que:

$$(9.8\text{ m/s}^2)(20\text{ m}) + \frac{1}{2} v^2 = (9.8\text{ m/s}^2)(0) + \frac{1}{2} (100\text{ m/s})^2$$

Despejando v , obtenemos:

$$v = \sqrt{(100\text{ m/s})^2 - 2(9.8\text{ m/s}^2)(20\text{ m})} = 98.02 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Es conveniente comentar que este resultado no nos indica la dirección en la que se mueve el proyectil. Sólo nos indica la rapidez, es decir, la magnitud de la velocidad del proyectil. Para conocer la dirección con la que se mueve el proyectil a la altura de 20 metros, utilicemos la ecuación 4.5.

$$m g h + \frac{1}{2} m v^2 = m g h_0 + \frac{1}{2} m v_0^2$$

Como $v_0^2 = v_0^2(\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0)$ y $v^2 = v^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$, sustituimos en la ecuación 4.5.

$$m g h + \frac{1}{2} m v^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = m g h_0 + \frac{1}{2} m v_0^2(\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0)$$

Como $v^2 \cos^2 \theta = v_0^2 \cos^2 \theta_0$ ya que en la dirección horizontal la velocidad es la misma independientemente de su posición, concluimos que:

$$g h + \frac{1}{2} v^2 \sin^2 \theta = g h_0 + \frac{1}{2} v_0^2 \sin^2 \theta_0$$

Despejando θ , tenemos:

$$\theta = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0 + 2 g (h_0 - h)}{v^2}} \right) \quad 4.6$$

Sustituyendo los valores para este problema, tenemos:

$$\theta = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{(100\text{ m/s})^2 \sin^2(30^\circ) - 2 (9.8\text{ m/s}^2) (20\text{ m})}{(98.02\text{ m/s})^2}} \right)$$

$$\theta = 27.93^\circ$$

Es importante comentar que para cada dirección inicial, se tiene diferente dirección final.

Supongamos que se lanza un proyectil con una rapidez inicial de $v_0 = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, formando un ángulo de $\theta_0 = 50^\circ$. Calculemos la rapidez del proyectil a una altura de 20 metros.

Utilizando la ecuación 4.5, obtenemos la rapidez del cuerpo para esta altura:

$$v = \sqrt{(100\text{ m/s})^2 - 2(9.8\text{ m/s}^2)(20\text{ m})} = 98.02 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Vemos que la rapidez que lleva el proyectil es siempre la misma, ya que se encuentra a una altura de 20 metros y es lanzado con la misma rapidez inicial, independientemente del ángulo con el cual se lance.

Para conocer el ángulo con el cual pasa a la altura de 20 metros, utilizamos la ecuación 4.6.

$$\theta = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{(100\text{ m/s})^2 \sin^2(50^\circ) - 2 (9.8\text{ m/s}^2) (20\text{ m})}{(98.02\text{ m/s})^2}} \right) = 49.02^\circ$$

Como se puede ver, la dirección con la que pasa el proyectil a la altura de 20 metros es diferente cuando es lanzado con una dirección de 50° a cuando es lanzado con una dirección de 30° .

Ejemplo 4.4

Determinar la altura mínima desde la cual una bola debiera empezar a caer de manera que pueda completar el movimiento circular mostrado en la figura 4.10BCN. Suponer que el bloque resbala sin rodar y sin ninguna fricción. También calcule las energías potencial, cinética y total de la bola en los puntos A, B y C.

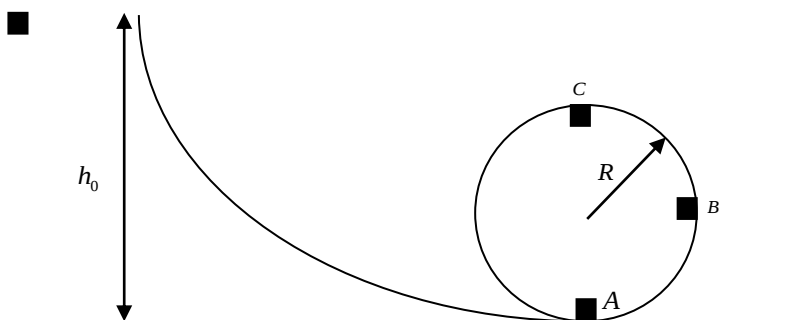


Figura 4.10

Solución:

Si la bola es soltada desde una altura h_0 , su energía potencial es igual a:

$$E_{p_0} = m g h_0$$

Y su energía cinética es igual a cero, por lo que la energía total del bloque es igual a su energía potencial.

La energía cinética del bloque en el punto A es igual a la energía total de la bola ya que su energía potencial en ese punto es cero, es decir:

$$E_{C_A} = \frac{1}{2} m v_A^2 = E_{p_0} = m g h_0$$

Por lo tanto, la velocidad del bloque en el punto A es igual a:

$$v_A = \sqrt{2 g h_0}$$

En el punto B la energía potencial del bloque es igual a:

$$E_{p_B} = m g R$$

Por lo que su energía cinética en el punto B es igual a la resta de la energía total menos la energía potencial.

$$E_{C_B} = E_T - E_{p_B} = m g h_0 - m g R$$

En el punto C, la energía potencial del bloque es igual a:

$$E_{p_C} = 2 m g R$$

En consecuencia, la energía cinética del bloque es igual a la resta de la energía total menos la energía potencial en ese punto.

$$E_{C_C} = E_T - E_{p_C} = m g h_0 - 2 m g R$$

Por lo tanto, la velocidad del bloque es igual a:

$$v_C = \sqrt{2 g h_0 - 4 g R}$$

Para que el bloque alcance el punto C, es necesario que la fuerza centrípeta sea igual al peso de la bola. Es decir:

$$m g = \frac{m v_C^2}{R}$$

Despejando v tenemos:

$$v_C = \sqrt{g R}$$

Igualando ambas velocidades se tiene:

$$\sqrt{2 g h_0 - 4 g R} = \sqrt{g R}$$

De aquí concluimos que h_0 es igual a:

$$h_0 = \frac{5}{2} R$$

Que es la altura mínima a la que se debe soltar el bloque para que alcance el punto C.

Ejemplo 4.5

Demuestre que para que el cuerpo de masa m amarrado a una cuerda, como el mostrado en la figura, gire en un círculo vertical de radio R , es necesario que la tensión en la cuerda en el punto b sea $6 m g$ y que la velocidad en ese punto sea $v_b = \sqrt{5 g R}$ donde g es la gravedad de la tierra.

Solución:

La tensión en la cuerda en el punto B es igual a la suma de la fuerza centrípeta más el peso del cuerpo, es decir:

Para que la bola pase por el punto A es necesario que la fuerza centrípeta sea igual al peso de la bola, es decir:

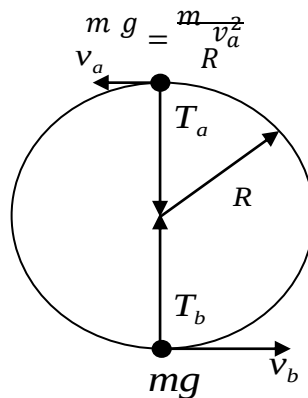


Figura 4.11

Por consecuencia, la velocidad de la bola en el punto A es igual a:

Por lo que la energía total de la bola en este punto es igual a:

Que es igual a la energía total de la bola en el punto B, es decir:

$$E_T = 2 m g R + \frac{1}{2} m v_a^2 = 2 m g R + \frac{1}{2} m g R = \frac{5}{2} m g R$$

Despejando v_b , se tiene:

$$v_b = \sqrt{5 g R}$$

Por lo que la tensión en la cuerda en el punto B es igual a:

$$T_b = m g + \frac{m v_b^2}{R} = m g + 5 m g = 6 m g$$

Que es resultado que se quería demostrar. Este valor es seis veces más grande que el peso del cuerpo.

Ejemplo 4.6

Se dispara hacia arriba un bloque de 0.5 kg sobre un plano inclinado con una rapidez inicial de $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, como se muestra en la figura 4.11. ¿Qué tan arriba llegará el bloque sobre el plano inclinado?

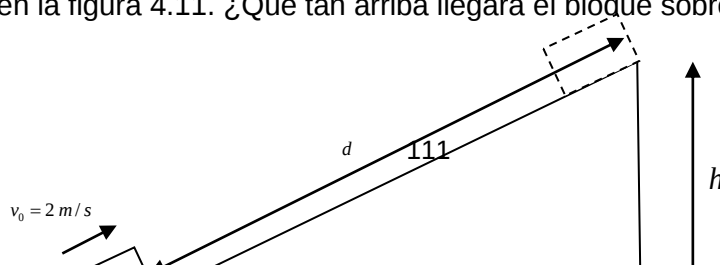


Figura 4.12

Solución:

La aceleración que experimenta el bloque hacia abajo a lo largo del plano es igual a:

Por lo que la distancia que recorrerá el bloque a lo largo del plano es igual a:

$$d = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - (2 \frac{m}{s})^2}{2(-9.8 \frac{m}{s^2}) \sin 30^\circ} = 0.41 \text{ m}$$

La altura a la que llega el bloque se calcula por medio de la siguiente expresión:

Que es similar a lanzar el objeto verticalmente con una velocidad inicial de $v = 2 \frac{m}{s}$.

Ejemplo 4.7

Una Máquina de Atwood como la mostrada en la figura, tiene masas de $m_1 = 5 \text{ kg}$ y $m_2 = 3 \text{ kg}$. Si el sistema inicialmente está en reposo, ¿cuál es la rapidez de las masas después de que se han movido $h = 1.5 \text{ m}$?

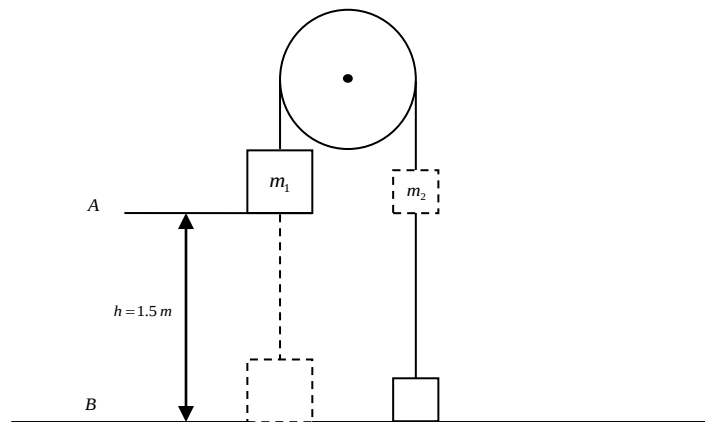


Figura 4.13

Solución:

La energía potencial del bloque de masa m_1 es $E_{p1} = m_1 g h$ y la energía potencial del bloque de masa m_2 es cero, al igual que sus energías cinéticas. Después que se desplazaron una distancia h , el bloque m_2 tiene una energía potencial igual a cero y el bloque de masa m_1 tiene una energía potencial igual a $E_{p1} = m_1 g h$. La energía cinética de los bloques en el punto B es igual a:

$$E_{p1} = m_2 g h \quad \text{y} \quad E_c = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2$$

Por conservación de la energía se tiene que:

Por lo que la velocidad de los bloques después de que se han desplazado una distancia h es igual a:

$$v = \sqrt{\frac{2(m_1 - m_2) g h}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{2(5 \text{ kg} - 3 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{m}{s^2}\right) (1.5 \text{ m})}{(5 \text{ kg} + 3 \text{ kg})}} = 2.71 \frac{m}{s}$$

Ejemplo 4.8

Calcule el trabajo realizado por una bomba que eleva 600 *litros* de gasolina dentro de un tanque que se encuentra a 20 *metros* por encima de la bomba. La densidad de la gasolina es de $820 \frac{kg}{m^3}$.

Solución:

La masa de la gasolina es igual a su volumen multiplicado por su densidad, es decir:

$$m = \rho V = \left(820 \frac{kg}{m^3}\right)(600 l) = \left(820 \frac{kg}{m^3}\right)(0.6 m^3) = 492 kg$$

En consecuencia, el trabajo realizado por la bomba para elevar 600 *litros* de gasolina hasta una altura de 20 *metros*, es igual a:

$$W = (492 kg) \left(9.8 \frac{m}{s^2}\right) (20 m) = 96\,432 J$$

Ejemplo 4.9

Un sistema como el mostrado en la figura, tiene masas de $m_1 = 5 kg$ y $m_2 = 3 kg$. Si el sistema inicialmente está en reposo, ¿cuál es la rapidez de las masas después de que se han movido $h = 1.5 m$?

Solución:

La energía total del sistema antes de que caiga el bloque de masa m_2 es igual a:

La energía cinética del sistema antes de que caiga el bloque de masa m_2 es cero ya que se encuentran en reposo los bloques.

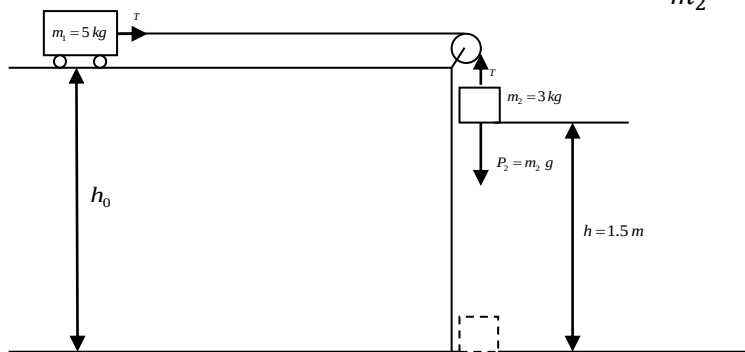


Figura 4.14

La energía total del sistema justo antes de que llegue el bloque de masa m_2 al piso, es igual a:

Igualando ambas energías y despejando la velocidad, se tiene:

$$v = \sqrt{\frac{2 m_2 g h}{m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{2 (3 kg) \left(9.8 \frac{m}{s^2}\right) (1.5 m)}{(5 kg + 3 kg)}} = 8.92 \frac{m}{s}$$

Esta es la velocidad de los bloques justo antes de que el bloque de masa m_2 llegue al suelo.

Ejemplo 4.10

Un cuerpo de $m = 10 kg$ de masa se mueve hacia arriba en un plano inclinado de 20° con respecto a la horizontal. Sobre el cuerpo actúan las siguientes fuerzas: una fuerza horizontal de $80 N$, una

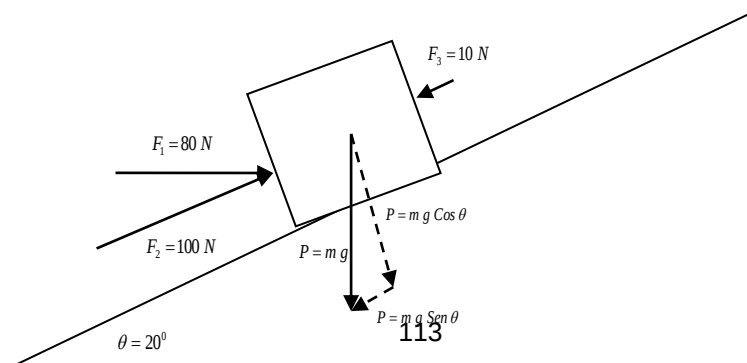


Figura 4.15

fuerza paralela al plano de 100 N y una fuerza constante de 10 N en contra del movimiento. Observe la figura 4.15. El bloque se trasladó a lo largo del plano. Calcular el trabajo total efectuado por el sistema de fuerzas sobre el cuerpo, así como el trabajo de cada fuerza.

Solución:

El trabajo que realizan las fuerzas para subir el cuerpo es igual al producto de las componentes de las fuerzas en la dirección del plano, multiplicadas por la distancia que recorra el bloque.

$$W_T = \sum F d \cos \theta$$

$$= (80 \text{ N})(20 \text{ m}) \cos 20^\circ + (100 \text{ N})(20 \text{ m}) \cos 0^\circ$$

$$+ (4 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(20 \text{ m}) \sin 20^\circ \cos 18^\circ + (10 \text{ N})(20 \text{ m}) \cos 18^\circ$$

$$W_T = 1503.5 \text{ J} + 2000 \text{ J} - 268.14 \text{ J} - 200 \text{ J} = 3035.36 \text{ J}$$

La energía cinética del bloque es igual al trabajo total desarrollado sobre el bloque. En consecuencia, su velocidad al momento de recorrer los 20 metros a lo largo del plano es igual a:

$$v = \sqrt{2(3035.36 \text{ J}) / 4 \text{ kg}} = 38.95 \text{ m/s}$$

Como el trabajo es positivo, porque las fuerzas que suben son mayores que las fuerzas que bajan, el bloque subirá a través del plano. La energía potencial que adquiere el bloque es igual a:

En consecuencia, la energía total del cuerpo después de recorrer 20 metros a lo largo del plano, es igual a la suma del trabajo hecho sobre el cuerpo más la energía potencial, es decir:

Si en ese momento dejaran de actuar las fuerzas que actúan sobre el bloque, ¿Qué distancia recorrerá el bloque a través del plano antes de que se detenga? ¿Cuál es su energía potencial y total a la altura máxima? ¿Con qué velocidad llegará al suelo?

La velocidad inicial del bloque en el momento de que se dejan de ejercer las fuerzas es igual a 38.95 m/s y la aceleración a la que está sujeta es $a = -3.35 \text{ m/s}^2$

La distancia que recorrerá el bloque antes de que se detenga, es igual a:

$$d = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - (38.95)^2}{2(-3.35)} = 226.46 \text{ m}$$

La posición final del bloque sobre el plano es igual a la distancia que recorrió originalmente más la distancia que recorrió después de que se dejaran de ejercer las fuerzas sobre él.

La altura a la que se encontrará el bloque en este punto es 226.46 m

En consecuencia, la energía potencial del bloque a la altura máxima es igual a:

Como la energía cinética del bloque en este punto es cero, ya que no continúa subiendo, es igual a la energía total. Esa energía total es igual a la energía que tendría el bloque en el momento de llegar al suelo. Así, la velocidad con la que llegaría al suelo sería igual:

$$v = \sqrt{\frac{2(3304.33 \text{ J})}{4 \text{ kg}}} = 40.64 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo 4.11

Calcule el trabajo que se necesita realizar para levantar hasta una altura h un bloque de masa 100 kg por medio de un sistema de poleas como el mostrado en la figura.

Solución:

El trabajo que se realizaría para levantar el bloque hasta una altura h sin poleas es igual a:

Utilizando el sistema de poleas, vemos que la fuerza que se necesita para levantar el bloque es igual a:

Ya que el peso está dividido entre dos cuerdas. $F = \frac{m \cdot g}{2}$

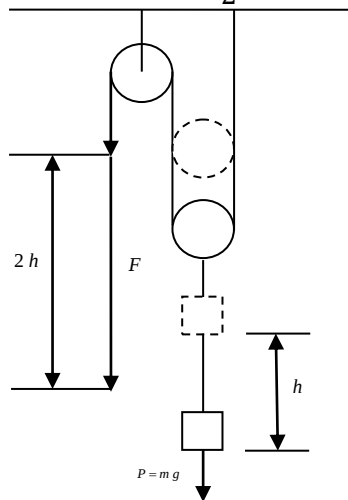


Figura 4.16

Para conocer el trabajo que se requiere para levantarlo hasta una altura h , es necesario multiplicarlo por la distancia en la que se aplica la fuerza. Esa distancia es igual al doble de la distancia a la que se eleva el bloque. Así, el trabajo que realiza la fuerza F es igual a:

Que es igual al trabajo que se realiza para elevar el bloque sin el sistema de poleas. En este caso la fuerza que se aplica por medio del sistema de poleas es igual a la mitad del peso del bloque, pero esa fuerza se tiene que aplicar a una mayor distancia.

Ejemplo 4.12

¿Cuál será la distancia en la que tiene que aplicarse la fuerza para levantar un bloque hasta una altura h a través del sistema de poleas mostrado en la figura 4.17?

Solución:

En la figura se muestran cuatro poleas, una fija y tres móviles. Dos de las poleas móviles están sujetas por una cuerda en la cual uno de sus extremos se encuentra fijo a la superficie horizontal y el otro extremo pasa por otra polea móvil. Uno de los extremos de la cuerda de la tercera polea móvil está fijo a la superficie horizontal y el otro extremo pasa por la polea fija. La cuerda en la primera polea móvil divide el peso del bloque en dos.

La tensión en el extremo de la primera polea es dividida por las dos cuerdas de la segunda polea móvil. Finalmente, la cuerda que pasa por la tercera polea divide la tensión de la cuerda que pasa por la segunda polea. En consecuencia, se tiene que:

$$T_3 + T_3 = 2T_3 = mg$$

$$T_2 + T_2 = 2T_2 = T_3$$

$$T_1 + T_1 = 2T_1 = T_2$$

Por lo que:

$$T_1 = F = \frac{mg}{8}$$

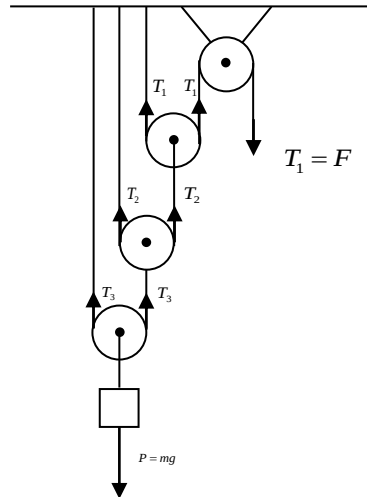


Figura 4.17

Al igual que en el problema anterior, la distancia que se mueve cada una de las poleas es la mitad de la que se mueve la anterior. Así, la distancia en la que se aplica la fuerza es ocho veces mayor que la distancia que recorre el bloque. Por lo tanto, el trabajo que realiza la fuerza F , es igual a:

Que es similar a que si se hubiese subido el bloque hasta una altura h aplicando una fuerza igual a su peso. Las poleas sirven para aminorar la fuerza que se debe aplicar para levantar un objeto. Sin embargo, la distancia en que se aplica la fuerza es más grande, de tal manera que el trabajo que se hace sobre el objeto sea siempre el mismo. Con estas herramientas es posible levantar objetos muy pesados.

Ejemplo 4.13

Calcule el trabajo que debe realizar el bloque de masa m_1 para que eleve hasta una altura h_2 al bloque de masa m_2 .

Solución:

Para que ambos bloques se equilibren, es necesario que la presión que se ejerza en ambas superficies donde se encuentran colocados los bloques deba ser la misma. La presión que se ejerce en ambas superficies es igual al peso de los bloques, dividida entre su respectiva superficie. Matemáticamente se tiene:



Figura 4.18

Por lo que el peso del bloque de masa m_1 debe ser igual al $m_2 g$

$$\frac{m_1 g}{A_1} = \frac{m_2 g}{A_2}$$

Para que se desplace el bloque de masa m_2 una distancia h_2 es necesario que el bloque de masa m_1 se desplace una distancia h_1 . Para conocer la relación entre ambas distancias debemos observar que el volumen que se desplaza el líquido es el mismo para ambos lados del recipiente. De esta forma:

$$A_1 h_1 = A_2 h_2$$

Despejando A_1 , obtenemos:

$$A_1 = \frac{h_2}{h_1} A_2$$

Sustituyendo en la ecuación para m_1 , se tiene:

$$m_1 g = \frac{A_1}{A_2} m_2 g = \frac{h_2}{h_1} m_2 g$$

Para elevar el bloque de masa m_2 hasta una altura h_2 , el trabajo que tiene que realizar el bloque de masa m_2 , es igual a:

$$m_1 g h_1 = \frac{h_2}{h_1} m_2 g h_1 = m_2 g h_2$$

Se multiplica por h_1 ya que es la distancia que tiene que recorrer el bloque de masa m_1 , la cual es la que hace elevar al bloque de masa m_2 . Se requiere menos fuerza pero se necesita recorrer mayor distancia. Se está cambiando fuerza por distancia.

Se debe aclarar que $m_1 g$ es el peso que debe tener el bloque de masa m_1 para que pueda subir el bloque de masa m_2 con una velocidad constante.

También observe que el trabajo que se requiere para elevar al bloque de masa m_2 por medio de este instrumento, es igual al trabajo que se necesitaría para subirlo directamente.

Estos ejemplos que hemos presentado, representan una situación ideal ya que no se ha tomado en cuenta la fricción o alguna otra fuerza que pueda detener el movimiento a pesar de que se esté realizando un trabajo sobre un objeto. Cuando aparezca una fuerza que detenga al movimiento de un cuerpo, la energía total debe disminuir. La resta de la energía total final menos la energía total inicial debe ser igual al negativo del producto de la fuerza que se utiliza para frenar al objeto, multiplicada por la distancia en la que actúa esa fuerza. Matemáticamente, esta afirmación la podemos expresar de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 + m g h - m g h_0 = -F d$$

El producto de la fuerza que frena al movimiento, por la distancia en la que se aplica esta fuerza, debe ser negativo ya que se disminuye la energía total del cuerpo. Para ver cómo se utiliza esta ecuación, veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 4.14

Se lanza hacia arriba un bloque sobre un plano inclinado con una rapidez inicial de $200 \frac{cm}{s}$, como se muestra en la figura 4.19. Calcule la altura a la que llegará el bloque, si el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano es de 0.15.

Solución:

La energía potencial del bloque es cero ya que se encuentra en el piso. De igual forma, la energía cinética del bloque en el punto más alto es igual a cero ya que no sigue moviéndose. En consecuencia, la diferencia de energías es igual a:

$$-\frac{1}{2} m v_0^2 + m g h = -F d = -\mu m g \cos(\theta) d = \frac{-\mu m g \cos(\theta) h}{\sin(\theta)} = \frac{-\mu m g h}{\tan(\theta)}$$

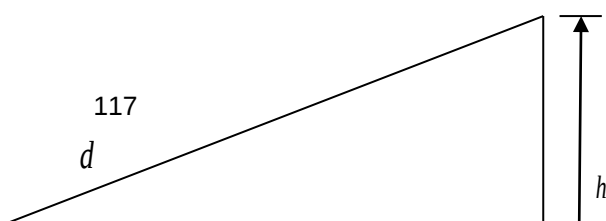


Figura 4.19

Despejando h , tenemos:

$$h = \frac{m v_0^2}{2 m g \left[1 + \mu \overline{\tan} (\theta) \right]} = \frac{v_0^2}{2 g \left[1 + \mu \overline{\tan} (\theta) \right]}$$

Sustituyendo:

$$h = \frac{(2 \text{ m/s})^2}{2 \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \left[1 + (0.15) \overline{\tan} (25^\circ) \right]} = 0.1544 \text{ m}$$

Por lo tanto, la distancia recorrida por el bloque sobre el plano es:

$$d = \frac{h}{\text{Sen} (\theta)} = \frac{0.1544}{\text{Sen} (25^\circ)} = 0.3653 \text{ m}$$

Debemos mencionar que para obtener el resultado no fue necesario conocer la masa del bloque, por lo que no depende de su masa.

Ejemplo 4.15

Un bloque resbala sobre un plano inclinado de 30° , como se muestra en la figura 4.20. Cuando la rapidez del bloque es de $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, comienza a frenar hasta detenerse. ¿Cuál es el valor de la fuerza de fricción que debe aplicarse si el bloque se va a detener cuando haya recorrido 100 m ?

Solución:

Supongamos que el bloque se detiene justo cuando llega al piso, por lo que su energía potencial sería igual a cero. De igual manera su energía cinética sería igual a cero porque se detiene el bloque. La energía potencial del bloque cuando lleve una velocidad de $12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ es igual a $m g h$. Aplicando la ecuación 4.3, se tiene:

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g h - \frac{1}{2} m v_0^2 - m g h_0 = -\frac{1}{2} m v_0^2 - m g h_0 = -F d$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + m g h_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 + m g d \text{ Sen} (\theta) = F d$$

Despejando F , se tiene:

$$F = \frac{m \frac{v_0^2}{2} + m g d \text{ Sen} (\theta)}{d} = \frac{(1 \ 200 \text{ kg})(12 \text{ m/s})^2/2 + (1 \ 200 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(100 \text{ m})(\text{Sen} (30^\circ))}{100 \text{ m}}$$

$$F = \frac{(1 \ 200 \text{ kg})(12 \text{ m/s})^2/2 + (1 \ 200 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(100 \text{ m})(\text{Sen} (30^\circ))}{100 \text{ m}} = 6 \ 744 \text{ N}$$

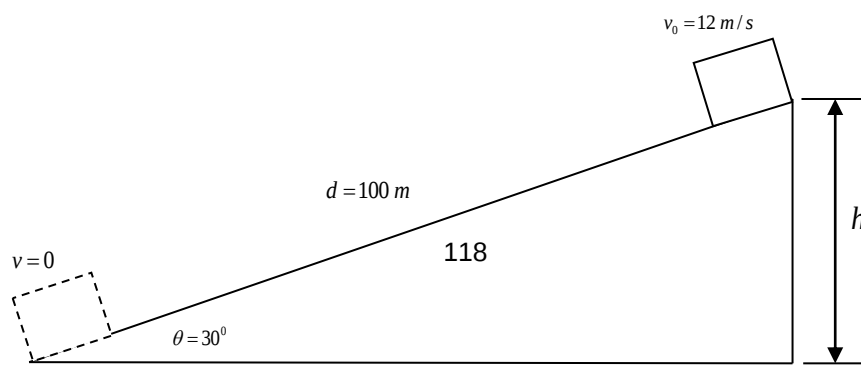


Figura 4.20

Ejemplo 4.16

Un bloque de 1 kg resbala con una velocidad de $15\frac{m}{s}$ sobre un plano horizontal, como se muestra en la figura 4.21. Si después de moverse 2 m el bloque se detiene, calcule la fuerza de fricción promedio que se necesitó para detener al bloque.

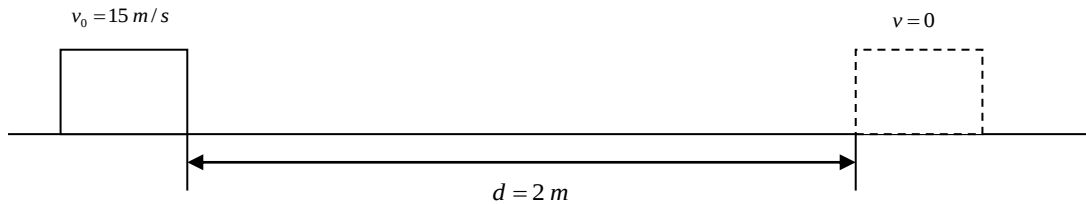


Figura 4.21

Solución:

El cambio de energía cinética es igual a menos el trabajo realizado por la fuerza de fricción promedio multiplicada por la distancia en que actúa la fuerza, es decir:

$$\frac{1}{2}m v^2 - \frac{1}{2}m v_0^2 = -F d$$

Por lo tanto:

$$F = \frac{m (v_0^2 - v^2)}{2 d} = \frac{(1\text{ kg})((15\text{ m/s})^2 - (0))}{2 (2\text{ m})} = 56.25\text{ N}$$

Ejemplo 4.17

Un automóvil que viaja a $30\frac{m}{s}$ choca contra un montículo de arena hasta detenerse. Si la distancia que recorrió el automóvil es de 5 m hasta detenerse, ¿cuál es la fuerza promedio que se utilizó para que se detuviera el automóvil si su masa es de $1\,200\text{ kg}$?

Solución:

El cambio de energía cinética es igual a menos el trabajo realizado por la fuerza de fricción promedio multiplicada por la distancia en que actúa la fuerza, es decir:

$$\frac{1}{2}m v^2 - \frac{1}{2}m v_0^2 = -F d$$

Por lo tanto:

$$F = \frac{m (v_0^2 - v^2)}{2 d} = \frac{(1\,200\text{ kg})((30\text{ m/s})^2 - (0))}{2 (5\text{ m})} = 108\text{ kN}$$

Ejemplo 4.18

Un objeto atado a un hilo se deja soltar desde el punto A mostrado en la figura 4.22. Cuando el objeto llega al punto B, el hilo choca contra un obstáculo obligando a que el objeto describa una circunferencia menor. Calcule la velocidad del objeto en los puntos B y C.

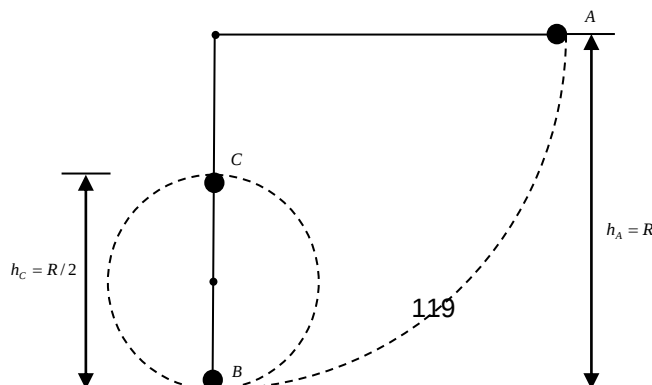


Figura 4.22

Solución:

La energía total del objeto en el punto A es igual a la suma de la energía cinética más la energía potencial, es decir:

$$E_T = \frac{1}{2} m v_A^2 + m g h_A = m g h_A = m g R$$

La energía cinética en el punto A es cero ya que el objeto se deja caer.

Como la energía se conserva, debe ser igual a la energía que tiene el objeto en el punto B . Al igualar ambas energías, tenemos:

$$m g R = \frac{1}{2} m v_B^2 + m g h_B = \frac{1}{2} m v_B^2$$

La energía potencial del objeto en B es cero, por lo que despejando la velocidad se encuentra que:

$$v_B = \sqrt{2 g R}$$

Como la energía se conserva, debe ser igual a la energía que tiene el objeto en el punto C . Al igualar ambas energías, tenemos:

$$m g R = \frac{1}{2} m v_C^2 + m g h_C = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{m g R}{2}$$

Despejando la velocidad del cuerpo en el punto C , tenemos:

$$v_C = \sqrt{g R}$$

Estos resultados no dependen de la masa del cuerpo.

Ejemplo 4.19

Una caja de 20 kg es subida por una rampa de 10 m de longitud que forma un ángulo de $\theta = 20^\circ$ con la horizontal. Observe la figura 4.23. Si una fuerza paralela al plano de 200 N es aplicada a la caja y el coeficiente de fricción es igual a 0.3 , hallar la fuerza total que se aplica a la caja, y la energía potencial y cinética de la caja al inicio y al final del movimiento.

Solución:

Las fuerzas que actúan sobre la caja en la dirección al plano son: la componente del peso, la fricción y la fuerza que hace mover a la caja. En consecuencia, la fuerza total que actúa sobre la caja es:

$$F_T = F - f_r - m g \text{ Sen } \theta = 1000 \text{ N} - \mu m g \text{ Cos } \theta - m g \text{ Sen } \theta$$

Es decir:

$$F_T = F - f_r - m g \text{ Sen } \theta = 200 \text{ N} - (0.3)(20 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \text{ Cos } 20^\circ - (20 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \text{ Sen } 20^\circ$$

$$F_T = 77.71 \text{ N}$$

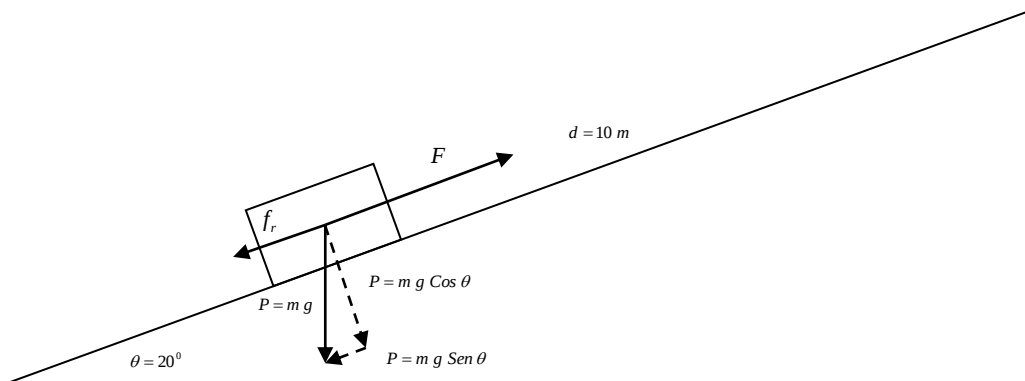


Figura 4.23

El trabajo realizado por esta fuerza es igual a:

$$W_T = F_T d = (77.71 \text{ N})(10 \text{ m}) = 777.1 \text{ J}$$

La energía potencial de la caja al final del movimiento es igual a:

$$E_p = m g h = m g d \text{ Sen } \theta = (20 \text{ kg}) \left(9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) (10 \text{ m}) (\text{Sen } 20^\circ) = 670.35 \text{ J}$$

La energía cinética de la caja al final del movimiento es igual a la resta del trabajo realizado por la fuerza total menos la energía potencial de la caja, es decir:

$$\frac{1}{2} m v^2 = W_T - E_p = 777.1 \text{ J} - 670.35 \text{ J} = 106.74 \text{ J}$$

Por lo que la velocidad de la caja es igual a:

$$v = \sqrt{\frac{2 * 106.74 \text{ J}}{20 \text{ kg}}} = 3.27 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

En todos los ejemplos que hemos visto, hemos supuesto que la fuerza que actúa sobre un cuerpo, es constante. Mientras que existen muchos casos como estos, hay numerosos casos en que la fuerza está lejos de ser constante. Uno de estos casos son los resortes. Para cada deformación del resorte se le aplica diferente fuerza. Este comportamiento está reflejado por la Ley de Hooke, que se establece matemáticamente de la siguiente forma:

$$F = -k x$$

Donde: F es la fuerza que se le aplica al resorte, x es la deformación del resorte y k es la constante del resorte. La fuerza depende de la deformación del resorte; a mayor deformación, mayor fuerza. También observe que la fuerza que se le aplica al resorte es negativa porque va en contra del movimiento.

Si hacemos una gráfica de la fuerza aplicada al resorte y la deformación que experimenta, obtendremos la gráfica mostrada en la figura 4.24.

El trabajo efectuado por la fuerza aplicada al resorte es igual al área bajo la gráfica. Si en este caso se tiene que la base del rectángulo es x y su altura es F , entonces el área del rectángulo formado por estos lados es igual a $A = k x^2$. Pero debido a que sólo se requiere el área del triángulo inferior de la gráfica, entonces el trabajo realizado por la fuerza que se actúa sobre el resorte es igual a:

$$W = -\frac{1}{2} k x^2$$

De esta forma, esta ecuación puede ser utilizada para calcular la energía que se necesita para comprimir o estirar un resorte.

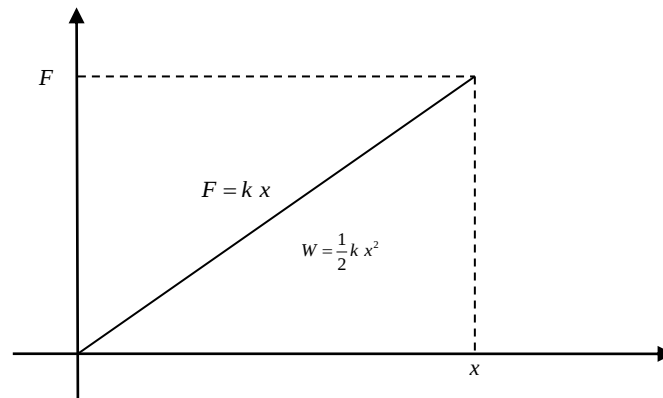


Figura 4.24

Ejemplo 4.20

Suponga que un bloque se encuentra sujeto a un resorte como se muestra en la figura 4.25. Suponga también que el resorte se estira de tal manera que su deformación es igual a x . Si se suelta el bloque, calcule la velocidad con la que pasará justo cuando el resorte no se encuentra deforme.

Solución:

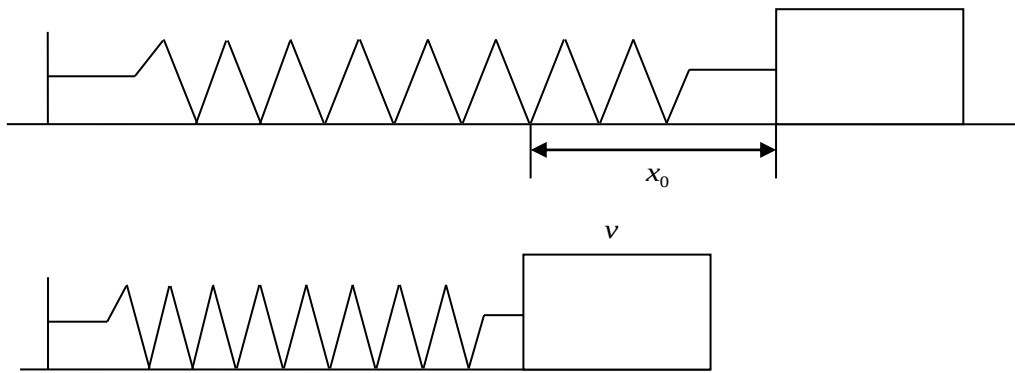
El cambio en la energía cinética del bloque es igual a menos el trabajo que se realiza para que se comprima el resorte. Es decir:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = - \left[\frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{2} k x_0^2 \right] = - \frac{1}{2} k (x^2 - x_0^2)$$

En el momento de soltar el bloque, su velocidad es igual a cero, por lo que la velocidad del bloque para cualquier deformación menor que x_0 es igual a:

$$v = \sqrt{\frac{k (x_0^2 - x^2)}{m}}$$

Observe que la velocidad del bloque depende de la raíz cuadrada de la constante del resorte multiplicada por la diferencia de los cuadrados de la máxima deformación y una deformación particular, dividida entre la masa del bloque.



$x=0$
Figura 4.25

Si la velocidad del bloque es diferente de cero cuando la deformación del resorte es x_0 , entonces la ecuación para la energía es igual a:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = - \left[\frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{2} k x_0^2 \right]$$

Despejando, tenemos que la velocidad del bloque justo en el momento de pasar por el punto donde el resorte no está deformado, es igual a:

$$v = \sqrt{\frac{k (x^2 - x_0^2)}{m} + v_0^2}$$

Se debe aclarar que v_0 es la velocidad que tiene el bloque cuando la deformación del resorte es x_0 . De igual forma, el bloque oscilará entre la posición de equilibrio indefinidamente si no existen fuerzas de fricción que lo detengan.

Ejemplo 4.21

Suponga ahora que un bloque está sujeto a un resorte que se encuentra verticalmente, como se muestra en la figura 4.26. Suponga que el resorte no está deformado y que el bloque se encuentra en reposo en ese punto. Calcule las posiciones en las que la velocidad del bloque es igual a cero y la velocidad del mismo a la mitad de la trayectoria entre ambos extremos.

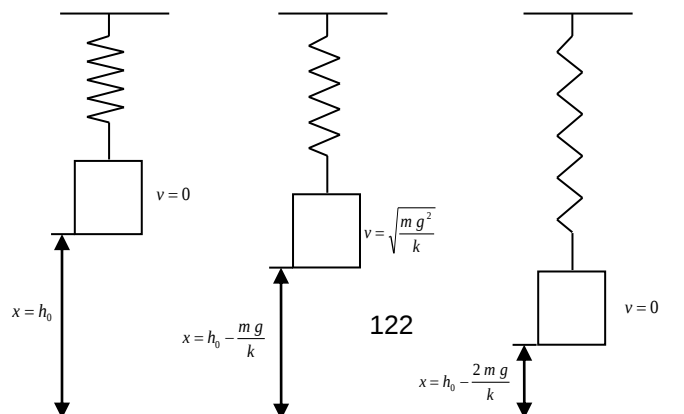


Figura 4.26

Solución:

La energía total del bloque es igual a menos el trabajo realizado por el resorte, es decir:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 + m g (h_0 - x) - m g h_0 = - \left[\frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{2} k x_0^2 \right]$$

Donde h_0 es la altura a la cual el resorte no se encuentra deformado; x es el desplazamiento del bloque; x_0 es la deformación inicial del resorte; v y v_0 es la velocidad final e inicial del bloque y k es la constante elástica del resorte.

Como el resorte no está deformado y la velocidad del bloque en el momento de soltarlo es igual a cero, entonces $x_0 = 0$ y $v_0 = 0$, por lo que la ecuación anterior se simplifica a:

$$\frac{1}{2} m v^2 - m g x + \frac{1}{2} k x^2 = 0$$

Para conocer las posiciones para las cuales la velocidad del bloque es igual a cero, debemos hacer $v = 0$, por lo que la ecuación anterior se convierte en:

$$\frac{1}{2} k x^2 - m g x = 0$$

Así, los valores para los cuales la velocidad del bloque es igual a cero, son: $x = 0$ y $x = \frac{2 m g}{k}$.

Para $x = \frac{m g}{k}$, que es un valor intermedio entre los dos extremos, la velocidad del bloque se obtiene sustituyendo esta posición en la ecuación para la velocidad, es decir:

$$\frac{1}{2} m v^2 - m g \left[\frac{m g}{k} \right] + \frac{1}{2} k \left[\frac{m g}{k} \right]^2 = 0$$

Despejando la velocidad, obtiene:

$$v = \sqrt{\frac{m g^2}{k}}$$

Que es la máxima velocidad que adquiere el bloque.

Si la velocidad del bloque es diferente de cero cuando no está deformado el resorte, entonces la ecuación para la energía es igual a:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 - m g x + \frac{1}{2} k x^2 = 0$$

Para conocer las posiciones para las cuales la velocidad del bloque es igual a cero, debemos hacer $v = 0$, por lo que la ecuación anterior se convierte en:

$$\frac{1}{2} k x^2 - m g x - \frac{1}{2} m v_0^2 = 0$$

Resolviendo para x se observa que es una ecuación de segundo grado, cuyas raíces son:

$$x_1 = \frac{2 m g + \sqrt{4 m^2 g^2 + 4 k m v_0^2}}{2 k} \text{ y } x_2 = \frac{2 m g - \sqrt{4 m^2 g^2 + 4 k m v_0^2}}{2 k}$$

Vemos que la deformación del resorte es mayor cuando la velocidad del bloque es igual a cero. La velocidad del bloque para el punto intermedio entre estos dos puntos, se obtiene sustituyendo este punto en la ecuación para la energía:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 - m g \left[\frac{m g}{k} \right] + \frac{1}{2} k \left[\frac{m g}{k} \right]^2 = 0$$

Donde $x = \frac{m g}{k}$ que es el punto intermedio. De esta forma, la velocidad del bloque para este punto es igual a:

$$v = \sqrt{\frac{m g^2}{k} + v_0^2}$$

Vemos que la máxima velocidad que adquiere el bloque es mayor en comparación con la velocidad del bloque del caso anterior porque lleva añadida la velocidad inicial.

4.2 Preguntas y Problemas

- Calcule el trabajo que realiza una fuerza igual a $F = 100 \text{ N}$ cuando se aplica a un cuerpo que se mueve una distancia de $d = 10 \text{ m}$.
Sol. $W = 1\,000 \text{ J}$.
- Calcule la fuerza F aplicada a un cuerpo, si realiza un trabajo de $W = 500 \text{ J}$ y se desplaza una distancia de $d = 20 \text{ m}$.
Sol. $F = 25 \text{ N}$.
- Calcule la distancia d que se desplaza un cuerpo, si se realiza un trabajo de $W = 1\,000 \text{ J}$ y se aplica una fuerza de $F = 40 \text{ N}$.
Sol. $d = 25 \text{ m}$.
- Calcule el cambio de energía cinética y el trabajo total que se realiza sobre el bloque mostrado en la figura 4.2, si $F_1 = 50 \text{ N}$, $\theta_1 = 30^\circ$, $F_2 = 30 \text{ N}$, $\theta_2 = 90^\circ$, $F_3 = 20 \text{ N}$, $\theta_3 = 140^\circ$ y la masa del bloque es de $m = 10 \text{ kg}$. De igual forma, calcule la velocidad del bloque.
Sol. $W = \Delta E_c = 27.98 \text{ J}$ y $v = 2.37 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- Calcule el valor de la fuerza F_1 para que el cambio de energía cinética del bloque que se muestra en la figura 4.2, sea igual a $\Delta E_c = 400 \text{ J}$, suponiendo que $\theta_1 = 40^\circ$, $F_2 = 30 \text{ N}$, $\theta_2 = 90^\circ$, $F_3 = 30 \text{ N}$, $\theta_3 = 150^\circ$ y que la distancia recorrida por el bloque es de $d = 10 \text{ m}$.
Sol. $F_1 = 86.13 \text{ N}$
- Calcule la masa del bloque mostrado en la figura 4.2, si el cambio de energía cinética es de $\Delta E_c = 50 \text{ J}$ y la velocidad final del cuerpo es de $v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, suponiendo que partió del reposo.
Sol. $m = 25 \text{ kg}$
- Calcule el valor de la fuerza F_3 para que el cambio de energía cinética del bloque que se muestra en la figura 4.2, sea igual a $\Delta E_c = -60 \text{ J}$, suponiendo que $F_1 = 100 \text{ N}$, $\theta_1 = 50^\circ$, $F_2 = 30 \text{ N}$, $\theta_2 = 90^\circ$, $\theta_3 = 150^\circ$.
Sol. $F_3 = 143.50 \text{ N}$
- Calcule el trabajo que se realiza sobre un cuerpo de $m = 70 \text{ kg}$ de masa para subirlo hasta una altura de $h = 50 \text{ m}$.
Sol. $W = 34\,300 \text{ J}$.
- Calcule la altura a la que se elevará un cuerpo de $m = 100 \text{ kg}$ de masa cuando se realiza un trabajo de $W = 50\,000 \text{ J}$.
Sol. $h = 51.02 \text{ m}$.
- Calcule la masa que debe tener un cuerpo para que al realizarse un trabajo sobre él de $W = 30\,000 \text{ J}$ para que se suba hasta una altura de $h = 45 \text{ m}$.
Sol. $m = 68.02 \text{ kg}$.
- Calcule el trabajo que se realiza sobre un cuerpo que se quiere subir hasta una altura $h = 15 \text{ m}$ a través de una rampa como la mostrada en la figura 4.5, si el ángulo de inclinación de la rampa es de $\theta = 45^\circ$ y la masa del bloque es de $m = 50 \text{ kg}$. De igual forma, calcule la fuerza con la que se sube el bloque y la distancia que recorre a través de la rampa.
Sol. $W = 7\,350 \text{ J}$. El trabajo no depende del ángulo de inclinación de la rampa. $F = 346.48 \text{ N}$. Esta fuerza es menor que la fuerza que se debe emplear para subir al cuerpo verticalmente. $d = 21.21 \text{ m}$. Esta distancia es mayor que la distancia que recorrería el cuerpo si se subiera verticalmente.
- Calcule la fuerza con la que se debe subir un cuerpo hasta una altura de $h = 20 \text{ m}$ a través de una rampa, si el ángulo de inclinación de la rampa es de $\theta = 30^\circ$ y la masa del bloque es de $m = 40 \text{ kg}$. De igual forma, calcule el trabajo con el que se sube el bloque y la distancia que recorre a través de la rampa.

Sol. $F = 196 \text{ N}$. Esta fuerza es menor que la fuerza que se debe emplear para subir el cuerpo verticalmente. $W = 7\,840 \text{ J}$. El trabajo no depende del ángulo de inclinación de la rampa. $d = 40 \text{ m}$. Esta distancia es mayor que la distancia que recorrería el cuerpo si se subiera verticalmente.

13. Calcule la altura a la que sube un cuerpo de $m = 30 \text{ kg}$ de masa a través de una rampa, si el ángulo de inclinación de la rampa es de $\theta = 40^\circ$ y se aplica un trabajo sobre el bloque de $W = 6\,000 \text{ J}$. De igual forma, calcule la fuerza con la que sube el bloque y la distancia que recorre a través de la rampa.

Sol. $h = 20.40 \text{ m}$. Esta distancia es mayor que la distancia que recorrería el cuerpo si se subiera verticalmente. $F = 188.97 \text{ N}$. Esta fuerza es menor que la fuerza que se debe emplear para subir el cuerpo verticalmente. $d = 31.74 \text{ m}$. Esta distancia es mayor que la distancia que recorrería el cuerpo si se subiera verticalmente.

14. Desde un edificio de $h = 50 \text{ m}$ de altura se deja caer un objeto de $m = 1 \text{ kg}$ de masa. Calcule la energía potencial, la energía cinética, la energía total y la velocidad del cuerpo al momento de soltarlo y de llegar al suelo. Calcule lo mismo cuando el objeto se encuentra a $h = 20 \text{ m}$ de altura.

Sol. $E_{P_0} = 490 \text{ J}$, $E_{C_0} = 0$, $E_T = 490 \text{ J}$, $v_0 = 0$, $E_{P_1} = 0$, $E_{C_1} = 490 \text{ J}$, $v_1 = 31.30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $E_{P_2} = 196 \text{ J}$, $E_{C_2} = 294 \text{ J}$ y $v_2 = 24.24 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

15. Desde un edificio de $h = 50 \text{ m}$ de altura se avienta hacia arriba, con una velocidad de $v_0 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, un objeto de $m = 1 \text{ kg}$ de masa. Calcule la energía potencial, la energía cinética, la energía total y la velocidad del cuerpo al momento de aventarlo y de llegar al suelo. Calcule lo mismo cuando el objeto se encuentra a $h = 20 \text{ m}$ de altura. Calcule la altura máxima que alcanza el objeto.

Sol. $E_{P_0} = 490 \text{ J}$, $E_{C_0} = 112.5 \text{ J}$, $E_T = 602.5 \text{ J}$, $v_0 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $E_{P_1} = 0$, $E_{C_1} = 602.5 \text{ J}$, $v_1 = 34.71 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $E_{P_2} = 196 \text{ J}$, $E_{C_2} = 406.5 \text{ J}$ y $v_2 = 28.51 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, h_{max} .

16. Desde un edificio de $h = 50 \text{ m}$ de altura se avienta hacia abajo, con una velocidad de $v_0 = -15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, un objeto de $m = 1 \text{ kg}$ de masa. Calcule la energía potencial, la energía cinética, la energía total y la velocidad del cuerpo al momento de aventarlo y de llegar al suelo. Calcule lo mismo cuando el objeto se encuentra a $h = 20 \text{ m}$ de altura.

Sol. $E_{P_0} = 490 \text{ J}$, $E_{C_0} = 0$, $E_T = 490 \text{ J}$, $v_0 = -15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $E_{P_1} = 0$, $E_{C_1} = 490 \text{ J}$, $v_1 = 31.30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $E_{P_2} = 196 \text{ J}$, $E_{C_2} = 294 \text{ J}$ y $v_2 = 24.24 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

17. Desde un edificio se deja caer un objeto de $m = 2 \text{ kg}$ de masa. Si se observa que la velocidad con la que llega al suelo es de $v = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcule la energía potencial, la energía cinética, la energía total y la altura a la que se deja soltar. Calcule lo mismo cuando el objeto se encuentra a $h = 10 \text{ m}$ de altura.

Sol. $E_{P_0} = 400 \text{ J}$, $E_{C_0} = 0$, $E_T = 400 \text{ J}$, $v_0 = 0$, $h_0 = 20.40 \text{ m}$, $E_{P_1} = 0$, $E_{C_1} = 400 \text{ J}$, $v_1 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $E_{P_2} = 196 \text{ J}$, $E_{C_2} = 204 \text{ J}$ y $v_2 = 14.28 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

18. Desde un edificio se avienta hacia arriba, con una velocidad de $v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, un objeto de $m = 2 \text{ kg}$ de masa. Si se observa que la velocidad con la que llega al suelo es de $v = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcule la energía potencial, la energía cinética, la energía total y la altura a la que se avienta el cuerpo. Calcule la altura máxima que alcanza. Calcule lo mismo cuando el objeto se encuentra a $h = 15 \text{ m}$ de altura.

Sol. $E_{P_0} = 500 \text{ J}$, $E_{C_0} = 400 \text{ J}$, $E_T = 900 \text{ J}$, $h_0 = 25.51 \text{ m}$, $E_{P_1} = 0$, $E_{C_1} = 900 \text{ J}$, $v_1 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, h_{max} , $E_{P_2} = 294 \text{ J}$, $E_{C_2} = 606 \text{ J}$ y $v_2 = 24.61 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

19. Desde un edificio se avienta hacia abajo, con una velocidad de $v_0 = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, un objeto de $m = 4 \text{ kg}$ de masa. Si se observa que la velocidad con la que llega al suelo es de $v = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcule la energía potencial, la energía cinética y la energía total. Calcule lo mismo cuando el objeto se encuentra a $h = 20 \text{ m}$ de altura.

Sol. $E_{P_0} = 3\,000\text{ J}$, $E_{C_0} = 200\text{ J}$, $E_T = 3\,200\text{ J}$, $h_0 = 76.53\text{ m}$, $E_{P_1} = 0$, $E_{C_1} = 3\,200\text{ J}$, $v_1 = 40\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $E_{P_2} = 784\text{ J}$, $E_{C_2} = 2\,416\text{ J}$ y $v_2 = 34.75\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

20. Desde un edificio de $h = 50\text{ m}$ se avienta hacia arriba un objeto de $m = 1\text{ kg}$ de masa. Si se observa que la velocidad con la que llega al suelo es de $v = 35\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcule la velocidad con la que fue lanzado el objeto, la energía potencial, la energía cinética y la energía total. Calcule lo mismo cuando el objeto se encuentra a $h = 40\text{ m}$ de altura. Calcule la altura máxima alcanzada.

Sol. $E_{P_0} = 490\text{ J}$, $v_0 = 15.65\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $E_{C_0} = 122.5\text{ J}$, $E_T = 612.5\text{ J}$, $E_{P_1} = 0$, $E_{C_1} = 612.5\text{ J}$, $E_{P_2} = 392\text{ J}$, $E_{C_2} = 2\,416\text{ J}$, $v_2 = 21.0\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y h_{max}

21. Desde un edificio de $h = 50\text{ m}$ se avienta hacia abajo un objeto de $m = 0.5\text{ kg}$ de masa. Si se observa que la velocidad con la que llega al suelo es de $v = 25\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcule la velocidad con la que fue lanzado el objeto, la energía potencial, la energía cinética y la energía total. Calcule lo mismo cuando el objeto se encuentra a $h = 40\text{ m}$ de altura.

Sol. $E_{P_0} = 245\text{ J}$, $v_0 = 18.44\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $E_{C_0} = 122.5\text{ J}$, $E_T = 156.25\text{ J}$, $E_{P_1} = 0$, $E_{C_1} = 156.25\text{ J}$, $E_{P_2} = 392\text{ J}$, $E_{C_2} = 2\,416\text{ J}$ y $v_2 = 21.0\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

22. Un proyectil se lanza con una rapidez inicial de $v_0 = 100\frac{\text{m}}{\text{s}}$, formando un ángulo de $\theta_0 = 40^\circ$ con respecto a la horizontal. Calcule la rapidez del proyectil a una altura de 20 metros y el ángulo que forma su trayectoria en esa altura.

Sol. $v = 98.02\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $\theta = 38.6^\circ$.

23. Un proyectil se lanza con una rapidez inicial de $v_0 = 100\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcule la rapidez del proyectil a una altura de 20 metros y el ángulo con el que se dispara si el ángulo que forma la trayectoria del proyectil cuando se encuentra a 20 metros de altura es de $\theta = 45^\circ$.

Sol. $v = 98.02\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $\theta_0 = 46.12^\circ$.

24. Un proyectil se lanza con una rapidez inicial de $v_0 = 100\frac{\text{m}}{\text{s}}$, formando un ángulo de $\theta_0 = 40^\circ$ con respecto a la horizontal. Calcule la altura y el ángulo que forma la trayectoria con la horizontal cuando la rapidez del proyectil es $v = 80\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Sol. $h = 183.49\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\theta_1 = 16.75^\circ$ y $\theta_2 = -16.75^\circ$.

25. Un proyectil se lanza con una rapidez inicial de $v_0 = 100\frac{\text{m}}{\text{s}}$, formando un ángulo de $\theta_0 = 45^\circ$ con respecto a la horizontal. Calcule la altura y la rapidez del proyectil cuando el ángulo que forma la trayectoria con la horizontal es $\theta = 30^\circ$.

Sol. $h = 169.89\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v = 81.65\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

26. Un proyectil se lanza con una rapidez inicial de $v_0 = 100\frac{\text{m}}{\text{s}}$, formando un ángulo de $\theta_0 = 45^\circ$ con respecto a la horizontal. Calcule el ángulo que forma la trayectoria del proyectil y su rapidez cuando se encuentra a una altura de $h = 30\text{ m}$.

Sol. $h = 97.01\text{ m}$ y $\theta = 43.21^\circ$.

27. Para cada uno de los puntos mostrados en la figura 4.10, calcule la energía cinética, la energía potencial, la energía total y la velocidad del bloque, si el radio del círculo es de $R = 1\text{ m}$, la masa del bloque es de $m = 1\text{ kg}$ y el bloque completa el movimiento circular.

Sol. $E_T = 24.5\text{ J}$, $E_{P_0} = 24.5\text{ J}$, $E_{P_A} = 0$, $E_{C_A} = 24.5\text{ J}$, $v_A = 7\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $E_{P_B} = 9.8\text{ J}$, $E_{C_B} = 14.7\text{ J}$, $v_B = 5.42\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $E_{P_C} = 19.6\text{ J}$, $E_{C_C} = 4.9\text{ J}$ y $v_C = 3.13\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

28. ¿Cuál es la altura mínima a la que se debe soltar un bloque para que pueda completar el movimiento circular mostrado en la figura 4.10, si el radio de curvatura del círculo es de $R = 5\text{ m}$?

Sol. $h_0 = 12.5\text{ m}$.

29. ¿Cuál es el radio de curvatura del círculo mostrado en la figura 4.10 si se deja soltar un bloque desde una altura $h_0 = 10\text{ m}$ y alcanza a completar el movimiento circular?

Sol. $R = 4\text{ m}$.

30. ¿Cuál es la tensión en la cuerda mostrada en la figura 4.11 para que un bloque gire en un círculo vertical, si la masa del bloque es de $m = 2 \text{ kg}$? ¿Cuál es la velocidad mínima del bloque si el radio de curvatura del círculo es igual a $R = 3 \text{ m}$?

Sol. $T_b = 117.6 \text{ N}$ y $v_b = 12.12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

31. Si la velocidad del bloque mostrado en la figura 4.11 es de $v_b = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, calcule el radio de curvatura máximo para que el cuerpo gire en un círculo vertical. ¿Cuál es la masa del bloque si la tensión en la cuerda en el punto más bajo es de $T_b = 20 \text{ N}$?

Sol. $R = 2.04 \text{ m}$ y $m = 0.34 \text{ kg}$.

32. Se dispara hacia arriba un bloque sobre un plano inclinado, con una rapidez inicial de $v_0 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y un ángulo de $\theta = 40^\circ$. ¿Cuál es la distancia que recorrerá sobre el plano? ¿Qué tan alto llegará el bloque sobre el plano inclinado?

Sol. $d = 0.714 \text{ m}$ y $h = 0.46 \text{ m}$.

33. Al disparar hacia arriba un bloque sobre un plano inclinado, se observa que alcanza una altura de $h = 1 \text{ m}$ y que el ángulo que forma el plano con la horizontal es de $\theta = 50^\circ$. ¿Con qué rapidez se lanzó? ¿Cuál es la distancia que recorrerá sobre el plano?

Sol. $v_0 = 4.43 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $d = 1.3 \text{ m}$.

34. Al disparar hacia arriba un bloque sobre un plano inclinado, se observa que alcanza una altura de $h = 1 \text{ m}$ y que la distancia que recorre por el plano es de $d = 2 \text{ m}$. ¿Cuál es el ángulo que forma el plano con la horizontal? ¿Con qué rapidez se lanzó?

Sol. $\theta = 30^\circ$ y $h = 4.43 \text{ m}$.

35. Al disparar hacia arriba un bloque sobre un plano inclinado, se observa que la distancia que recorre por el plano es de $d = 3 \text{ m}$ y que el ángulo que forma el plano con la horizontal es de $\theta = 60^\circ$. ¿Qué tan alto llegará el bloque sobre el plano inclinado? ¿Con qué rapidez se lanzó?

Sol. $h = 2.598 \text{ m}$ y $v_0 = 7.14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

36. Si las masas de los bloques en una máquina de Atwood son $m_1 = 10 \text{ kg}$ y $m_2 = 5 \text{ kg}$. ¿Cuál es la velocidad con la que se moverán en el momento en que se han desplazado una distancia de $h = 5 \text{ m}$?

Sol. $v = 5.71 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

37. Si la masa más grande de los bloques de una máquina de Atwood es igual a $m_1 = 10 \text{ kg}$ y en el momento en que se han desplazado una distancia de $h = 3 \text{ m}$, llevan una velocidad de $v = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. ¿Cuál es la masa del otro bloque?

Sol. $m_2 = 5.72 \text{ kg}$.

38. Si la masa más chica de los bloques de una máquina de Atwood es igual a $m_2 = 10 \text{ kg}$ y en el momento en que se han desplazado una distancia de $h = 4 \text{ m}$, llevan una velocidad de $v = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. ¿Cuál es la masa del otro bloque?

Sol. $m_1 = 26.98 \text{ kg}$.

39. Si las masas de los bloques en una máquina de Atwood son: $m_1 = 5 \text{ kg}$ y $m_2 = 2 \text{ kg}$. ¿Qué distancia se han desplazado si llevan una velocidad de $v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$?

Sol. $h = 0.48 \text{ m}$

40. Si las masas de los bloques del sistema mostrado en la figura 4.14 son: $m_1 = 10 \text{ kg}$ y $m_2 = 5 \text{ kg}$. ¿Cuál es la velocidad con la que se moverán en el momento en que se han desplazado una distancia de $h = 5 \text{ m}$?

Sol. $v = 5.71 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

41. Si la masa de uno de los bloques del sistema mostrado en la figura 4.14 es $m_1 = 10 \text{ kg}$ y en el momento en que se han desplazado una distancia de $h = 3 \text{ m}$, llevan una velocidad de $v = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. ¿Cuál es la masa del otro bloque?

Sol. $m_2 = 3.74 \text{ kg}$.

42. Si la masa de uno de los bloques del sistema mostrado en la figura 4.14 es $m_2 = 10 \text{ kg}$ y en el momento en que se han desplazado una distancia de $h = 4 \text{ m}$, llevan una velocidad de $v = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. ¿Cuál es la masa del otro bloque?

Sol. $m_1 = 11.77 \text{ kg}$.

43. Si las masas de los bloques del sistema mostrado en la figura 4.14 son $m_1 = 5 \text{ kg}$ y $m_2 = 2 \text{ kg}$. ¿Qué distancia se han desplazado si llevan una velocidad de $v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$?

Sol. $h = 0.71 \text{ m}$.

44. Un cuerpo de 10 kg de masa se mueve hacia arriba en un plano inclinado de 30° con respecto a la horizontal. Sobre el cuerpo actúan las siguientes fuerzas: una fuerza horizontal de 300 N , una fuerza paralela al plano de 50 N y una fuerza constante de 100 N en contra del movimiento. Observe la figura 4.15. El bloque se traslada 5 m a lo largo del plano. Calcule el trabajo total efectuado por el sistema de fuerzas sobre el cuerpo. Calcule la velocidad del cuerpo en el momento que recorre los 5 m . La energía total del bloque al momento en que se encuentra a 5 m . Si dejan de actuar las fuerzas, calcule la distancia que recorrerá y la altura a la que se encontrará el bloque cuando se detenga,

Sol. $W = 1\,220.05 \text{ J}$, $v = 16.62 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $E_T = 1\,710.05 \text{ J}$, $d = 28.18 \text{ m}$ y $h = 19.09 \text{ m}$.

45. Si en un sistema de poleas como el mostrado en la figura 4.16, se aplica una fuerza de $F = 100 \text{ N}$, ¿cuál es la masa del bloque?

Sol. $m = 81.63 \text{ kg}$.

46. Si en un sistema de poleas como el mostrado en la figura 4.16, la masa del bloque es de $m = 50 \text{ kg}$, ¿cuál es la fuerza mínima para subir el bloque?

Sol. $F = 61.25 \text{ N}$.

47. Se lanza hacia arriba un bloque sobre un plano inclinado con una rapidez inicial de $v_0 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y el ángulo que forma el plano con la horizontal es de $\theta = 30^\circ$. Calcule la altura a la que llegará el bloque y la distancia que recorre sobre el plano, si el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano es de $\mu = 0.2$.

Sol. $h = 0.61 \text{ m}$ y $d = 1.21 \text{ m}$.

48. Se lanza hacia arriba un bloque sobre un plano inclinado y se observa que alcanza una altura de $h = 1 \text{ m}$ y el ángulo que forma el plano con la horizontal es de $\theta = 40^\circ$. Calcule la velocidad con la que fue lanzado el bloque y la distancia que recorre sobre el plano, si el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano es de $\mu = 0.1$.

Sol. $v_0 = 4.68 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $d = 1.55 \text{ m}$.

49. Se lanza hacia arriba un bloque sobre un plano inclinado con una rapidez inicial de $v_0 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y se observa que alcanza una altura de $h = 1 \text{ m}$. Calcule la distancia que recorre el bloque sobre el plano y el ángulo que forma el plano con la horizontal, si el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano es de $\mu = 0.15$.

Sol. $\theta = 28.56^\circ$ y $d = 2.09 \text{ m}$.

50. Se lanza hacia arriba un bloque sobre un plano inclinado y se observa que alcanza una altura de $h = 1 \text{ m}$ y recorre una distancia de $d = 3 \text{ m}$. Calcule el ángulo que forma el plano con la horizontal y la rapidez inicial con la que fue lanzado el bloque, si el coeficiente de fricción entre el bloque y el plano es de $\mu = 0.1$.

Sol. $\theta = 19.47^\circ$ y $v_0 = 5.01 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

5 CANTIDAD DE MOVIMIENTO

5.1 Concepto de cantidad de movimiento

En todos estos fenómenos están involucradas la velocidad y la masa de un objeto. La conjunción de ambas nos da un concepto llamado cantidad de movimiento. El producto de la masa que tiene un cuerpo por la velocidad con la que se mueve, se le conoce como cantidad de movimiento, ímpetu o momento lineal. Matemáticamente se tiene:

$$p = m v \quad 5.1$$

Donde p es la cantidad de movimiento, m es la masa del cuerpo y v es la velocidad con la que se mueve el cuerpo. La cantidad de movimiento es una magnitud vectorial porque es el producto de una magnitud escalar (la masa) por una cantidad vectorial (la velocidad). En consecuencia, para que la cantidad de movimiento sea completamente especificada debe ser representada por su magnitud y su dirección. Esta expresión nos indica que mientras más grande sea la masa y/o la rapidez de un objeto, su cantidad de movimiento es mayor. O si la masa y la rapidez del cuerpo es pequeña, entonces su cantidad de movimiento también debe ser pequeño. Es por eso que un objeto con masa muy grande como un camión, es muy difícil de detener a pesar de que tenga una velocidad relativamente pequeña. La unidad de la cantidad de movimiento en el Sistema Internacional es kilogramo por metro entre segundo. La dirección de la cantidad de movimiento de un cuerpo coincide con la dirección de la velocidad del cuerpo. La masa no cambia la dirección de la cantidad de movimiento y de la velocidad del cuerpo; ambas direcciones son iguales.

Ejemplo 5.1

Supongamos que un objeto tiene una masa $m = 10 \text{ kg}$ y tiene una velocidad de $v = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcule la cantidad de movimiento que tiene el objeto.

Solución:

Utilizando la ecuación 5.1, tenemos:

$$p = m v = (10 \text{ kg}) * \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 200 \text{ kg } \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo 5.2

Si esa cantidad de movimiento o momento lineal lo tiene una pelota cuya masa es de 100 gr. ¿Cuál sería la velocidad de la pelota?

Despejando la velocidad en la ecuación 5.1, se tiene:

$$v = \frac{p}{m} = \frac{200 \text{ kg } \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0.1 \text{ kg}} = 2\,000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Vemos que la pelota llevaría una velocidad de 2 000 metros en cada segundo, lo que sería prácticamente muy difícil de conseguir.

Ejemplo 5.3

¿Cuál es la masa de un objeto cuya cantidad de movimiento es de $p = 100 \text{ kg } \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y velocidad es de $v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$?

Solución:

Despejando la masa de la ecuación 5.1, se tiene:

$$m = \frac{p}{v} = \frac{100 \text{ kg } \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 20 \text{ kg}$$

Vemos que el objeto tendría una masa de 20 kg.

5.2 Impulso

Una fuerza F que actúa durante un tiempo t sobre un cuerpo le proporciona un impulso, dado por:

$$I = F t$$

La unidad del Impulso en el Sistema Internacional es N*s.

Cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo se produce un cambio en la cantidad de movimiento. Así, el impulso aplicado a un cuerpo es igual al cambio de la cantidad de movimiento, es decir:

$$I = F t = \Delta p \quad 5.2$$

Donde Δp es el cambio en la cantidad de movimiento, F es la fuerza que se aplica al cuerpo, t es el tiempo en el cual se aplica la fuerza e I es el impulso. El cambio en la cantidad de movimiento puede ocurrir debido al cambio de la masa, de la velocidad o de ambas. Si la masa permanece constante, entonces debe ocurrir un cambio de velocidad si la cantidad de movimiento cambia. Si el cambio en la cantidad de movimiento es constante, entonces el producto de la fuerza por el tiempo también sería constante y, como el transcurso del tiempo se considera constante, entonces la fuerza que se aplica también sería constante. Esto es un caso particular en el cual la fuerza aplicada es constante. En general, la fuerza puede variar y, en ese caso, el cambio en la cantidad de movimiento no sería constante. De esta forma, el impulso depende del producto de la fuerza que se le aplique a un cuerpo multiplicado por el tiempo en que aplique. El impulso será más grande si aplicamos la misma fuerza durante un tiempo más prolongado. O el impulso será más pequeño si aplicamos la misma fuerza en un tiempo muy corto. Tanto la fuerza como el tiempo son importantes para cambiar el impulso de un cuerpo. Se puede tener el mismo impulso aplicando una fuerza grande en un tiempo muy pequeño o aplicando una fuerza pequeña en un tiempo muy grande. Cuando la fuerza es muy grande, como el golpe de un martillo, un bastón de golf, un bate, etc., se ha observado que el cuerpo puede llegar a deformarse, ya sea permanentemente o temporalmente. En el caso en que la fuerza sea muy pequeña, el tiempo en que se aplique debe ser muy grande para producir el mismo impulso. Así, si queremos detener el movimiento de un objeto sería conveniente utilizar una fuerza muy pequeña en un tiempo muy grande, ya que al utilizar una fuerza muy grande en un tiempo muy pequeño, se tendría la posibilidad de que el cuerpo se deforme o nos duela más el golpe que experimentamos si tratamos de

detenerlo con alguna parte de nuestro cuerpo. Esto puede suceder cuando un automóvil choca contra un muro, un árbol o cualquier obstáculo que sea sólido. Las consecuencias pueden ser fatales cuando la fuerza que se aplica es grande en un tiempo muy corto. En cambio, si utilizamos arena, paja o cualquier material que haga que la fuerza que se aplique sea pequeña en un tiempo relativamente largo, hará que el objeto se detenga con poca posibilidad de que se deforme, incluso permanentemente como sucede con los automóviles. Por eso es conveniente que los autos se fabriquen con material que pueda ser fácilmente deformable para que la fuerza con la que llegue a chocar un auto contra un material sólido, se disminuya en un tiempo más grande en comparación con la fuerza que se aplica cuando el auto no tiene material fácilmente deformable. Mucha gente cuestionaba los autos que eran contruidos con partes que no fueran de metal, pero después se dieron cuenta que convenía más ya que en un accidente el impacto se amortiguaba más porque sus piezas no eran tan sólidas. El problema ahora es que la deformación que sufren los autos hace que la gente quede atrapada dentro de ellos. Pero eso es otro problema. Lo mismo sucede cuando caemos en el piso después de haber saltado desde una determinada altura. Lo más conveniente es flexionar las piernas para que la fuerza con que caigamos sea en un tiempo más prolongado, evitando así que la fuerza sea grande.

En conclusión, se pueden tener iguales impulsos pero en algunas ocasiones la fuerza con la que se aplica el impulso debe ser grande, ocasionando que el tiempo en que se aplique la fuerza sea muy corto. Mientras más corto sea el tiempo en el que se aplique la fuerza, mayor será la fuerza que se aplique. Los golpes que se dan ya sea con martillos o con cualquier tipo de instrumentos, harán que se aplique una fuerza muy grande en un tiempo relativamente corto. Por eso tenemos que evitar que nos pegue el martillo a la hora que estamos clavando. Para evitar un poco ese efecto, es recomendable que se usen guantes para aumentar el tiempo en que nos golpee el martillo. En otras ocasiones es recomendable que el tiempo que tarda en actuar una fuerza sea relativamente grande, para evitar que nos afecte. Esto se podría aplicar a los casos en que atrapamos una pelota dura, como una pelota de béisbol o algo similar. Para aumentar el tiempo que tarde la fuerza en actuar, se debe mover la mano en dirección del movimiento de la pelota. Lo mismo sucede si queremos evitar que nos afecte el golpe producido por un objeto. Es conveniente movernos en la dirección en la que se mueve el objeto para prolongar el tiempo que tarda en actuar la fuerza.

De la ecuación 5.2 concluimos que el impulso produce un cambio en cantidad de movimiento, es decir:

$$I = F t = \Delta p = m (v - v_0) \quad 5.3$$

Para ilustrar este concepto, hagamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.4

Supongamos que un automóvil de 1 500 kg de masa se mueve con una velocidad de $20 \frac{m}{s}$. Si el automóvil choca contra una pared de tal manera que se detiene en un tiempo de 0.5 s, calcule la fuerza con la que se detiene el automóvil.

Solución:

La velocidad inicial con la que se mueve el automóvil es de $v_0 = 20 \frac{m}{s}$, cuando el automóvil se detiene su velocidad es de cero. Como la masa del automóvil es de 1500 kg y se detiene en un tiempo de 0.5 s, encontramos que la fuerza con la que se detiene es igual a:

$$F = \frac{m (v - v_0)}{t} = \frac{(1\,500\,kg) \left(0 - 20 \frac{m}{s}\right)}{0.5} = -60\,000\,N\,s$$

Vemos que la fuerza es negativa debido a que el automóvil se detiene, por lo que la fuerza va en contra del movimiento. Si el tiempo en que se detiene el auto es mayor, por ejemplo un segundo, la fuerza con la que se detendría el auto sería igual a:

$$F = \frac{m (v - v_0)}{t} = \frac{-30\,000\,N\,s}{1\,s} = -30\,000\,N$$

Se observa que la fuerza es mayor debido a que el tiempo en que actúa es mayor.

5.3 Conservación de la Cantidad de Movimiento

Cuando un cuerpo experimenta un impulso, la ecuación 5.3 afirma que ha actuado una fuerza sobre el cuerpo para que pueda cambiar su cantidad de movimiento. Una fuerza es consecuencia de la interacción con otros cuerpos. Así, por la tercera ley de Newton, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo

también las experimentan los cuerpos que las provocan. La cantidad de movimiento de un sistema de cuerpos en los que no existe una fuerza externa que influya, se mantiene constante. De esta forma, el cambio en la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual al cambio en la cantidad de movimiento del resto de los cuerpos que componen el sistema, siempre y cuando, el sistema no reciba influencia de fuerzas externas. Cuando un sistema se encuentra aislado, la cantidad de movimiento se mantiene constante porque no hay fuerzas externas. En el caso en que el sistema estuviera influido por una fuerza, su cantidad de movimiento cambiaría. En consecuencia, podemos afirmar que:

“Si sobre un sistema no se ejerce fuerza neta, la cantidad de movimiento no cambia”

De esta forma, la cantidad de movimiento de los cuerpos que interactúan en un sistema aislado, permanece constante. Esto nos indica que la cantidad de movimiento de cada una de las partículas que constituyen un sistema aislado, puede cambiar, pero la suma de la cantidad de movimiento de todas las partículas, permanece constante. Así, la cantidad de movimiento que posee un sistema antes de su interacción, es igual a la cantidad de movimiento después de su interacción. Cuando la cantidad de movimiento no cambia, decimos que se conserva. Por lo que la cantidad de movimiento de un sistema se conserva cuando sobre el sistema no actúan fuerzas. A este hecho se le conoce como ley de conservación de la cantidad de movimiento.

Como consecuencia de esto podemos afirmar que en la colisión entre partículas o cuerpos, en la desintegración radiactiva o en una explosión, la cantidad de movimiento se mantiene constante, siempre y cuando no haya fuerzas externas.

Si consideramos la caída de un cuerpo, el cuerpo en sí mismo no estaría aislado y, en consecuencia, su cantidad de movimiento cambiaría. Cambiaría porque estaría expuesto a una fuerza externa como el peso. Pero si consideramos como sistema al formado por el cuerpo y la Tierra, la cantidad de movimiento del sistema permanecería constante. El problema es que el cambio en la cantidad de movimiento de la Tierra no se percibe por su gran masa. Pero teóricamente debe cambiar, independientemente de que se perciba o no. Sin embargo, si ponemos a interactuar a dos cuerpos que tengan masas muy similares, el cambio en la cantidad de movimiento se percibiría fácilmente. Por ejemplo, supongamos que una bola de billar choca contra una pelota de esponja. Como la masa de la bola de billar es muy grande en comparación de la masa de la pelota de esponja, después del choque la bola de billar mantendría su movimiento en la misma dirección con la que se movía antes del choque. En cambio, la pelota de esponja comenzaría a moverse en la misma dirección con la que se movía la bola de billar. Si ahora la pelota de esponja es la que se mueve y la bola de billar se encuentra en reposo, al chocar la pelota de esponja veremos que rebotaría y que la bola de billar se movería muy poco, en la misma dirección en la que se movía la pelota de esponja antes de la colisión. Si las masas de ambas pelotas son iguales, al impactar una de ellas sobre la otra veríamos que la que se encuentra en reposo se movería con la misma velocidad con la que se movía la bola que impactó y que la bola que impactó se quedaría estática después de la colisión. En todos estos casos la cantidad de movimiento de cada uno de los cuerpos cambia, pero la cantidad de movimiento del sistema permanece constante. Esto es considerando que los cuerpos giran sin fricción porque, si consideramos que influye la fricción, entonces la cantidad de movimiento no se mantendría constante debido a la presencia de una fuerza externa.

5.4 Colisiones elásticas

Los ejemplos de colisiones que hemos analizado anteriormente, son ejemplos de colisiones que se consideran elásticas porque la deformación que sufren no es permanente y esta deformación no genera una pérdida de calor. En estas condiciones se dice que la colisión es elástica.

5.4 Colisiones inelásticas

Cuando un cuerpo se deforma permanentemente o genera calor en una colisión, se dice que la colisión es inelástica. De igual forma, cuando dos o más objetos en una colisión quedan unidos, decimos que la colisión es inelástica. Es muy común encontrar colisiones inelásticas. Por ejemplo, cuando aventamos un papel mojado hacia el techo o el piso, vemos que se queda pegado. En este caso se dice que la colisión es inelástica. De igual forma sucede cuando dos autos quedan unidos después de un choque. También sucede cuando una persona atrapa una pelota. También son ejemplos de colisiones inelásticas cuando dejamos caer al piso una pelota de esponja. Vemos que rebotaría un número finito de veces hasta que deja de botar. Estas colisiones son inelásticas porque, a pesar de

que no se deforma permanentemente la pelota, se generaría calor en cada rebote y esto, teóricamente, aumentaría su temperatura. A pesar de que existan colisiones inelásticas, la cantidad de movimiento se conservaría. Por ejemplo, se ha visto que cuando un cuerpo colisiona con otro que se encuentra en reposo y queda unido después de la colisión, la velocidad del cuerpo que lleva ahora el cuerpo que se movía, es menor ya que se encuentra unido al cuerpo que se encontraba en reposo. Esa unión hace que la velocidad del cuerpo que se movía disminuyera. Al hacer cálculos de la suma de la cantidad de movimiento de los cuerpos antes y después de la colisión, vemos que son iguales. Es decir, la cantidad de movimiento de un sistema en la que existen colisiones inelásticas, también se conserva.

Ejemplo 5.4

Supongamos que se tiene una bola de $m_1 = 5 \text{ kg}$ de masa y se mueve con una velocidad de $v_{0_1} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ la cual choca contra otra bola de $m_2 = 10 \text{ kg}$ de masa que se mueve en el mismo sentido a lo largo de una misma línea con una velocidad de $v_{0_2} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Después de la colisión, la primera masa aún está en movimiento en la misma dirección, pero con una velocidad de $v_1 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcular la velocidad de la segunda masa después del impacto.

Solución:

Como la cantidad de movimiento se conserva, se tiene que:

$$m_1 v_{0_1} + m_2 v_{0_2} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad 5.4$$

Despejando v_2 se tiene:

$$v_2 = \frac{m_1 v_{0_1} + m_2 v_{0_2} - m_1 v_1}{m_2}$$

Y sustituyendo

$$v_2 = \frac{(5 \text{ kg}) \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) + (10 \text{ kg}) \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) - (5 \text{ kg}) \left(8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{10 \text{ kg}} = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Después de la colisión la segunda bola tiene una velocidad de $v_2 = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, con el mismo sentido con el que se movía antes.

Ejemplo 5.5

Un automóvil de $m_1 = 1200 \text{ kg}$ de masa, viaja a $v_{0_1} = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ y choca contra otro automóvil $m_2 = 1500 \text{ kg}$ que lleva una velocidad de $v_{0_2} = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ en la misma dirección. Si los autos permanecen unidos después del choque, ¿Con qué velocidad se moverán?

Solución:

Utilizando la ecuación 5.4 se tiene:

$$m_1 v_{0_1} + m_2 v_{0_2} = m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \quad 5.5$$

Se utiliza v porque es la misma velocidad para los dos.

Despejando v y sustituyendo los datos se tiene:

$$v = \frac{m_1 v_{0_1} + m_2 v_{0_2}}{m_1 + m_2} = \frac{(1\,200 \text{ kg}) \left(100 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) + (1\,500 \text{ kg}) \left(30 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)}{1\,200 \text{ kg} + 1\,500 \text{ kg}} = 61.11 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Este resultado nos dice que la velocidad final de los dos coches es de $v = 61.11 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ en la misma dirección en la que se movían antes de la colisión.

¿Qué hubiese sucedido si el segundo auto se moviese en sentido contrario y con la misma velocidad?

Solución:

Utilizando la ecuación anterior, se tiene:

$$v = \frac{m_1 v_{0_1} + m_2 v_{0_2}}{m_1 + m_2} = \frac{(1\,200 \text{ kg}) \left(100 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) + (1\,500 \text{ kg}) \left(-30 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)}{1\,200 \text{ kg} + 1\,500 \text{ kg}} = 27.77 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Este resultado nos dice que la velocidad final de los dos coches es de $v = 27.77 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ en la misma dirección en la que se movían antes de la colisión. La velocidad final de los dos autos tiene la misma dirección que la dirección del primer coche porque lleva mayor cantidad de movimiento.

¿Qué velocidad debería llevar el segundo auto para que la cantidad de movimiento final sea igual a cero?

Como la cantidad de movimiento debe ser igual a cero, la velocidad de ambos coches debe ser cero, por lo que:

$$v = \frac{m_1 v_{01} + m_2 v_{02}}{m_1 + m_2} = \frac{(1\,200\text{ kg})\left(100\frac{\text{km}}{\text{h}}\right) + (1\,500\text{ kg}) v_{02}}{1\,200\text{ kg} + 1\,500\text{ kg}} = 0$$

Despejando la velocidad inicial del segundo auto, se tiene:

$$v_{02} = \frac{-(1\,200\text{ kg})\left(100\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)}{1\,500\text{ kg}} = -80\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Este resultado nos dice que para que la cantidad de movimiento después de la colisión sea igual a cero, el segundo auto debe moverse a una velocidad $v_{02} = -80\frac{\text{km}}{\text{h}}$. El signo negativo nos indica que el movimiento del segundo auto debe ser en dirección contraria al movimiento del primer auto. Este tipo de colisiones corresponde a una colisión perfectamente inelástica, ya que quedan unidos los dos cuerpos después de la colisión.

Calculemos la energía cinética de los autos antes de la colisión y después de ella.

La energía cinética de los autos antes de la colisión es igual a:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m_1 v_{01}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{02}^2 &= \frac{1}{2}(1\,500\text{ kg})(100\text{ km/h})^2 + \frac{1}{2}(1\,200\text{ kg})(30\text{ km/h})^2 \\ &= 8\,040\,000\text{ kg km}^2/\text{h}^2\end{aligned}$$

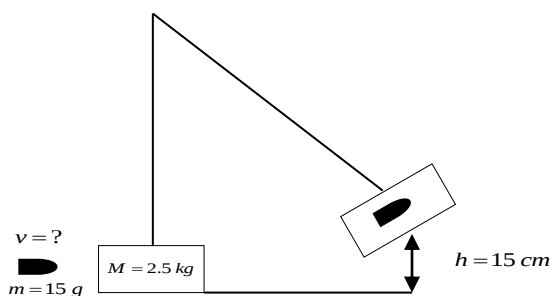
Y la energía cinética de los autos después de la colisión, es igual a:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 = \frac{1}{2}(1\,500\text{ kg} + 1\,200\text{ kg})(61.11\text{ km/h})^2 = 5\,041\,483.335\text{ kg km}^2/\text{h}^2$$

Vemos que ambos resultados no coinciden, por lo que concluimos que en una colisión inelástica, la energía cinética del sistema no se conserva, o lo que es equivalente, si la colisión es perfectamente elástica, la energía cinética del sistema se conserva.

Ejemplo 5.6

Este ejemplo es muy usado para conocer la velocidad con la que se mueve una bala. Para ello se utiliza un bloque de madera que cuelga de un hilo. Se mide la masa de la bala y del bloque de madera. Después de se mide la altura a la que llega el bloque con la bala. La figura siguiente muestra esta situación.



Supongamos que después del impacto de la bala con el bloque de madera, la altura a la que llegan es de $h = 15\text{ cm}$. Calcular la velocidad con la que la bala impacta el bloque.

Solución:

Como sabemos que la cantidad de movimiento de la bala y del bloque es la misma antes y después del impacto, por lo que se tiene:

$$m v_0 + M V_0 = m v + M v = (m + M) v$$

Donde v es la velocidad del bloque con la bala en el momento de comenzar a subir, v_0 es la velocidad de la bala y V_0 es la velocidad del bloque antes del impacto. Esta velocidad es igual a cero. Por

conservación de la energía, la energía cinética del bloque y la bala justo después del impacto, es igual a la energía potencial a la altura máxima alcanzada. De esta forma se tiene:

$$\frac{1}{2}(m + M)v^2 = (m + M) g h$$

Despejando v obtenemos:

$$v = \sqrt{2 g h}$$

Sustituyendo esta ecuación en la ecuación correspondiente a la conservación de la cantidad de movimiento, se llega a:

$$m v_0 + M V_0 = m v + M v = (m + M) \sqrt{2 g h}$$

Es decir:

$$m v_0 + M V_0 = (m + M) \sqrt{2 g h}$$

Despejando v_0 se llega a:

$$v_0 = \frac{(m + M)\sqrt{2 g h} - M V_0}{m}$$

Sustituyendo, se tiene:

$$v_0 = \frac{(0.015 \text{ kg} + 2.5 \text{ kg})\sqrt{2 (9.8 \text{ m/s}^2) (0.15 \text{ m})} - (2.5 \text{ kg})(0)}{(0.015 \text{ kg})} = 287.49 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Que es la velocidad de la bala antes del impacto.

5.6 Coeficiente de restitución

Para cualquier colisión entre dos cuerpos en la se mueven a lo largo de una línea recta, el coeficiente de restitución e se define como:

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{01} - v_{02}} \quad 5.6$$

Donde: v_{01} y v_{02} son las velocidades iniciales y v_1 y v_2 son las velocidades finales de los cuerpos.

Para una colisión perfectamente elástica $e = 1$, para una colisión inelástica $e < 1$ y para una colisión perfectamente inelástica $e = 0$. En una colisión perfectamente inelástica, los cuerpos permanecen unidos después de la colisión. Esto sucede con la bala que impacta al bloque de madera. Observaciones experimentales muestran que la mayoría de los cuerpos duros son altamente resilientes, mientras que los cuerpos blandos son menos resilientes y rebotan menos. La resiliencia se define como la capacidad de un cuerpo a sufrir una compresión o rápida deformación, sin que se deforme permanentemente. El vigor con el cual el cuerpo se restablece a su antigua forma después de una deformación es llamado restitución.

Para encontrar experimentalmente el coeficiente de restitución, se deja caer un cuerpo esférico sobre un cuerpo duro como el metal. Conociendo la altura a la cual se deja caer el objeto y la altura a la que rebota, podemos calcular el coeficiente de restitución por medio de la siguiente ecuación:

$$e = \sqrt{\frac{h}{H}} \quad 5.7$$

Donde: h es la altura a la que rebota la esfera y H es la altura desde la que se deja caer.

El coeficiente de restitución no puede ser mayor que uno ya que no se ha observado que una esfera no rebota a una altura mayor que la altura a la cual se deja caer. Si este fuera el caso entonces se estaría liberando energía en cada rebote, la cual se reflejaría en un rebote cada vez mayor hasta que se termine de liberar la energía almacenada. De igual forma, el coeficiente de restitución no puede ser menor que cero.

Ejemplo 5.7

Se deja caer una pelota desde una altura H y se observa que rebota hasta una altura de $h = 0.7 H$. Calcule el coeficiente de restitución entre la pelota y el piso donde rebota.

Solución:

Utilizando la ecuación 5.7, se tiene:

$$e = \sqrt{\frac{h}{H}} = \sqrt{\frac{0.7 H}{H}} = \sqrt{0.7} = 0.8366$$

Observe que para un rebote del 70%, el coeficiente de restitución es igual a $e = 0.8366$.

Para un coeficiente de restitución igual a 1, la energía cinética del sistema de cuerpos que colisionan, se conserva. Por lo que es equivalente decir que si el coeficiente de restitución es igual a uno entonces la energía cinética de ambos cuerpos se conserva o si la energía cinética de un sistema de dos cuerpos se conserva, entonces el coeficiente de restitución entre estos dos cuerpos es igual a uno.

Como el coeficiente de restitución es igual a uno, entonces la energía cinética de ambos cuerpos que colisionan se conserva. Por consecuencia, utilizando la ecuación 5.6, se tiene:

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{01} - v_{02}} = 1$$

Despejando v_2

$$v_2 = v_{01} - v_{02} + v_1 \quad 5.8$$

Sustituyéndola en la ecuación 5.4, se tiene:

$$m_1 v_{01} + m_2 v_{02} = m_1 v_1 + m_2 (v_{01} - v_{02} + v_1)$$

Al despejar v_1 , obtenemos:

$$v_1 = \frac{v_{01}(m_1 - m_2) + 2m_2 v_{02}}{m_1 + m_2} \quad 5.9$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación 5.6 en la ecuación 5.5, obtenemos:

$$v_2 = \frac{v_{02}(m_2 - m_1) + 2m_1 v_{01}}{m_1 + m_2} \quad 5.10$$

Ejemplo 5.8

Supongamos que dos pelotas de 0.1 kg de masa chocan de frente. La velocidad inicial de una pelota es igual a $v_{01} = 1 \frac{m}{s}$ y la velocidad inicial de la segunda pelota es de $v_{02} = -2 \frac{m}{s}$ (el signo indica que se mueve en sentido contrario a la primera pelota). Si el choque es perfectamente elástico, ¿cuál es la velocidad final de cada pelota?

Solución:

Como el choque es perfectamente elástico, utilizaremos las ecuaciones 5.9 y 5.10 para calcular las velocidades finales de las pelotas.

$$v_1 = \frac{\left(1 \frac{m}{s}\right)(0.1 \text{ kg} - 0.1 \text{ kg}) + 2(0.1 \text{ kg})\left(-2 \frac{m}{s}\right)}{2 \text{ m}} = -2 \frac{m}{s}$$

y

$$v_2 = \frac{\left(-2 \frac{m}{s}\right)(0.1 \text{ kg} - 0.1 \text{ kg}) + 2(0.1 \text{ kg})\left(1 \frac{m}{s}\right)}{2 \text{ m}} = 1 \frac{m}{s}$$

Observamos que cada pelota le transmite la velocidad que lleva la otra, debido a que el coeficiente de restitución es igual a uno.

Ejemplo 5.9

Supongamos que una pelota de 0.2 kg de masa se mueve con una velocidad de $v_{01} = 12 \frac{m}{s}$ y choca de frente con otra pelota de 0.1 kg de masa que lleva una velocidad de $v_{02} = -24 \frac{m}{s}$ (el signo indica que se mueve en sentido contrario a la primera pelota). Si el choque es perfectamente elástico, calcule la velocidad final de cada pelota.

Solución:

Como el choque es perfectamente elástico, utilizaremos las ecuaciones 5.9 y 5.10 para calcular las velocidades finales de las pelotas.

$$v_1 = \frac{\left(12 \frac{m}{s}\right)(0.2 \text{ kg} - 0.1 \text{ kg}) + 2(0.1 \text{ kg})\left(-24 \frac{m}{s}\right)}{0.2 \text{ kg} + 0.1 \text{ kg}} = -12 \frac{m}{s}$$

y

$$v_2 = \frac{\left(-24 \frac{m}{s}\right)(0.1 \text{ kg} - 0.2 \text{ kg}) + 2(0.2 \text{ kg})\left(12 \frac{m}{s}\right)}{0.2 \text{ kg} + 0.1 \text{ kg}} = 24 \frac{m}{s}$$

Observamos que ambas pelotas se mueven con la misma velocidad pero en sentido contrario después de la colisión. Para comprobar que la energía cinética de las dos pelotas es la misma antes y después de la colisión, sustituamos estos valores en la ecuación para la energía cinética.

$$\frac{1}{2}m_1 v_{01}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{02}^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

Es decir:

$$\frac{1}{2}(0.2 \text{ kg}) (12 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(0.1 \text{ kg}) (-24 \text{ m/s})^2 = \frac{1}{2}(0.2 \text{ kg}) (-12 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(0.1 \text{ kg}) (24 \text{ m/s})^2$$

Por lo que:

$$43.2 \text{ J} = 43.2 \text{ J}$$

Por lo que ambas cantidades son iguales ya que cualquier valor negativo elevado al cuadrado se convierte en positivo. Así, la energía cinética se conserva porque el choque es completamente elástico. Consideremos ahora una colisión inelástica ($0 < e < 1$). El valor del coeficiente de restitución se encuentra entre cero y uno. Para conocer las velocidades finales de los cuerpos después de una colisión frontal, utilizamos la ecuación 5.6 y despejamos la velocidad v_2 , es decir:

$$v_2 = e(v_{01} - v_{02}) + v_1 \quad 5.11$$

Y la sustituimos en la ecuación 5.4

$$m_1 v_{01} + m_2 v_{02} = m_1 v_1 + m_2 (e(v_{01} - v_{02}) + v_1) \quad 5.12$$

Al despejar v_1 , obtenemos:

$$v_1 = \frac{m_1 v_{01} + m_2 v_{02} - m_2 e(v_{01} - v_{02})}{m_1 + m_2} \quad 5.13$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación 5.10 en la ecuación 5.8, obtenemos:

$$v_2 = \frac{m_1 v_{01} + m_2 v_{02} + m_1 e(v_{01} - v_{02})}{m_1 + m_2} \quad 5.14$$

Podemos ver que si el valor del coeficiente de restitución en la ecuación 5.11 es igual a 1, obtenemos las ecuaciones 5.9 y 5.10.

Ejemplo 5.10

Supongamos que una pelota de 0.2 kg de masa se mueve con una velocidad de $v_{01} = 12 \frac{m}{s}$ y choca de frente con otra pelota de 0.1 kg de masa que lleva una velocidad de $v_{02} = -24 \frac{m}{s}$ (el signo indica que se mueve en sentido contrario a la primera pelota). Si el coeficiente de restitución entre ambas pelotas es $e = 0.5$, calcule las velocidades de ambas pelotas después de la colisión.

Solución:

Como la colisión es inelástica, utilizaremos las ecuaciones 5.13 y 5.14 para calcular las velocidades finales de las pelotas.

$$v_1 = \frac{(0.2 \text{ kg})\left(12 \frac{m}{s}\right) + (0.1 \text{ kg})\left(-24 \frac{m}{s}\right) - (0.1 \text{ kg})(0.5)\left(12 \frac{m}{s} - \left(-24 \frac{m}{s}\right)\right)}{0.2 \text{ kg} + 0.1 \text{ kg}} = -6 \frac{m}{s}$$

Y

$$v_2 = \frac{(0.2 \text{ kg})\left(12 \frac{m}{s}\right) + (0.1 \text{ kg})\left(-24 \frac{m}{s}\right) + (0.2 \text{ kg})(0.5)\left(12 \frac{m}{s} - \left(-24 \frac{m}{s}\right)\right)}{0.2 \text{ kg} + 0.1 \text{ kg}} = 12 \frac{m}{s}$$

Vemos que ambas pelotas se mueven en sentido contrario al que se movían antes de la colisión y con una velocidad menor debido a que el coeficiente de restitución es menor que 1.

Calculemos la energía cinética de las pelotas antes y después de la colisión.

$$\frac{1}{2}m_1 v_{01}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{02}^2 = \frac{1}{2}(0.2 \text{ kg})(12 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(0.1 \text{ kg})(-24 \text{ m/s})^2 = 43.2 \text{ J}$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(0.2 \text{ kg})(-6 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(0.1 \text{ kg})(12 \text{ m/s})^2 = 10.8 \text{ J}$$

Observamos que son diferentes debido a que el coeficiente de restitución es menor que 1. Entonces, ¿en dónde queda la energía que se perdió? En la deformación que sufren las pelotas. No toda la energía que reciben la devuelven íntegramente, aumentando imperceptiblemente su temperatura.

Ejemplo 5.11

Supongamos ahora que una pelota de 0.2 kg de masa se mueve con una velocidad de $v_{0_1} = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y choca de frente con otra pelota de 0.1 kg de masa que lleva una velocidad de $v_{0_2} = -24 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (el signo indica que se mueve en sentido contrario a la primera pelota). Si el coeficiente de restitución entre ambas pelotas es $e = 0.1$, calcule las velocidades de ambas pelotas después de la colisión.

Solución:

Como la colisión es inelástica, utilizaremos las ecuaciones 5.13 y 5.14 para calcular las velocidades finales de las pelotas.

$$v_1 = \frac{(0.2 \text{ kg})\left(12 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) + (0.1 \text{ kg})\left(-24 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) - (0.1 \text{ kg})(0.1)\left(12 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(-24 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\right)}{0.2 \text{ kg} + 0.1 \text{ kg}} = -0.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Y

$$v_2 = \frac{(0.2 \text{ kg})\left(12 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) + (0.1 \text{ kg})\left(-24 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) + (0.2 \text{ kg})(0.1)\left(12 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(-24 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\right)}{0.2 \text{ kg} + 0.1 \text{ kg}} = 2.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Vemos que ambas pelotas se mueven en sentido contrario al que se movían antes de la colisión y con una velocidad menor debido a que el coeficiente de restitución es menor que 1. También observamos que las velocidades finales para este caso son menores en comparación con las velocidades finales del ejemplo anterior.

Calculemos la energía cinética de las pelotas antes de la colisión y después de la colisión.

$$\frac{1}{2}m_1 v_{0_1}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{0_2}^2 = \frac{1}{2}(0.2 \text{ kg})(12 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(0.1 \text{ kg})(-24 \text{ m/s})^2 = 43.2 \text{ J}$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(0.2 \text{ kg})(-0.3 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(0.1 \text{ kg})(2.4 \text{ m/s})^2 = 0.297 \text{ J}$$

Observamos que son diferentes debido a que el coeficiente de restitución es menor que 1. También observamos que la energía cinética final de las pelotas para este ejemplo, es menor que la energía cinética final del ejemplo anterior, debido a que el coeficiente de restitución es menor.

Si la colisión es perfectamente inelástica, entonces el coeficiente de restitución es igual a cero, lo que implica que los cuerpos se mantengan unidos después de la colisión. Para aclarar un poco más esta situación, hagamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.12

Supongamos ahora que un cuerpo de 0.2 kg de masa se mueve con una velocidad de $v_{0_1} = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y choca de frente con otro cuerpo de 0.1 kg de masa que lleva una velocidad de $v_{0_2} = -24 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (el signo indica que se mueve en sentido contrario a la primera pelota). Si el coeficiente de restitución entre ambos cuerpos es $e = 0$, calcule la velocidad de los cuerpos después de la colisión.

Solución:

Como la colisión es perfectamente inelástica, utilizaremos las ecuaciones 5.13 y 5.14 para calcular las velocidades finales de las pelotas.

$$v_1 = \frac{(0.2 \text{ kg})\left(12 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) + (0.1 \text{ kg})\left(-24 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) - (0.1 \text{ kg})(0)\left(12 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(-24 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\right)}{0.2 \text{ kg} + 0.1 \text{ kg}} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Y

$$v_2 = \frac{(0.2 \text{ kg})\left(12 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) + (0.1 \text{ kg})\left(-24 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) + (0.2 \text{ kg})(0)\left(12 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(-24 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\right)}{0.2 \text{ kg} + 0.1 \text{ kg}} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Vemos que ambos cuerpos quedan unidos por ser una colisión perfectamente inelástica y que su velocidad es igual a cero.

Calculemos la energía cinética de los cuerpos antes y después de la colisión. Para antes de la colisión, se tiene:

$$\frac{1}{2}m_1 v_{01}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{02}^2 = \frac{1}{2}(0.2 \text{ kg})(12 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(0.1 \text{ kg})(-24 \text{ m/s})^2 = 43.2 \text{ J}$$

Y para después de la misma:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(0.2 \text{ kg})(0)^2 + \frac{1}{2}(0.1 \text{ kg})(0)^2 = 0 \text{ J}$$

Observamos que son diferentes debido a que el coeficiente de restitución es igual a cero. También observamos que la energía cinética final de los cuerpos para este ejemplo, es menor que la energía cinética final de los ejemplos anteriores, debido a que el coeficiente de restitución es menor. La energía cinética se perdió en la deformación de los cuerpos.

Ejemplo 5.13

Supongamos ahora que un cuerpo de $m_1 = 0.5 \text{ kg}$ de masa se mueve con una velocidad inicial de $v_{01} = -24 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y choca de frente con otro cuerpo de $m_2 = 1.0 \text{ kg}$ de masa. Después de la colisión este cuerpo adquiere una velocidad de $v_2 = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Si el coeficiente de restitución entre ambos cuerpos es $e = 0.5$, calcule la velocidad final del primer cuerpo y la velocidad inicial del segundo cuerpo.

Solución:

Utilizamos la ecuación 5.6 y despejamos la velocidad v_{02} , es decir:

$$v_{02} = \frac{e v_{01} - v_2 + v_1}{e}$$

Y la sustituimos en la ecuación 5.4

$$m_1 v_{01} + m_2 \left(\frac{e v_{01} - v_2 + v_1}{e} \right) = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

Al despejar v_1 , obtenemos:

$$v_1 = \frac{m_2 v_2 (1+e) - v_{01} e (m_1 + m_2)}{m_2 - e m_1} \quad 5.15$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación 5.15 en la ecuación 5.8, obtenemos:

$$v_{02} = \frac{m_1 v_2 - m_1 v_{01} (1+e) + m_2 v_2}{m_2 - e m_1} \quad 5.16$$

Sustituyendo los valores del problema en las ecuaciones anteriores, tenemos:

$$v_1 = \frac{(1.0 \text{ kg}) \left(-10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (1 + 0.5) - \left(-24 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (0.5) (0.5 \text{ kg} + 1.0 \text{ kg})}{1.0 \text{ kg} - (0.5) (0.5 \text{ kg})} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Y

$$v_{02} = \frac{(0.5 \text{ kg}) \left(-10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) - (0.5 \text{ kg}) \left(-24 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (1 + 0.5) + (1.0 \text{ kg}) \left(-10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)}{1.0 \text{ kg} - (0.5) (0.5 \text{ kg})} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

En consecuencia, la velocidad final del primer cuerpo es de $v_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y la velocidad inicial del segundo cuerpo es de $v_{02} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, por lo que ambos cuerpos se van a mover en sentido contrario a la dirección en la que se movían antes de la colisión.

Ejemplo 5.14

Resolvamos el ejemplo anterior suponiendo que la colisión es completamente inelástica.

Solución:

Como la colisión es inelástica, el coeficiente de restitución es igual a cero ($e = 0$). Sustituyendo los valores del problema anterior en las ecuaciones 5.12 y 5.13, se tiene:

$$v_1 = \frac{(1.0 \text{ kg}) \left(-10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (1 + 0) - \left(-24 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (0) (0.5 \text{ kg} + 1.0 \text{ kg})}{1.0 \text{ kg} - (0) (0.5 \text{ kg})} = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Y

$$v_{0_2} = \frac{(0.5 \text{ kg}) \left(-10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) - (0.5 \text{ kg}) \left(-24 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) (1 + 0) + (1.0 \text{ kg}) \left(-10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{1.0 \text{ kg} - (0) (0.5 \text{ kg})} = -3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Vemos que la velocidad final del primer cuerpo es igual a la velocidad final del segundo cuerpo. Esto era de esperarse ya que, por ser una colisión inelástica, los cuerpos quedan unidos después de la colisión.

Ejemplo 5.15

Resolvamos el ejemplo anterior suponiendo que la colisión es perfectamente elástica.

Solución:

Como la colisión es perfectamente elástica, el coeficiente de restitución es igual a uno ($e = 1$).

Sustituyendo los valores del problema anterior en las ecuaciones 5.15 y 5.16, se tiene:

$$v_1 = \frac{(1.0 \text{ kg}) \left(-10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) (1 + 1) - \left(-24 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) (1) (0.5 \text{ kg} + 1.0 \text{ kg})}{1.0 \text{ kg} - (1) (0.5 \text{ kg})} = 32 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Y

$$v_{0_2} = \frac{(0.5 \text{ kg}) \left(-10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) - (0.5 \text{ kg}) \left(-24 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) (1 + 1) + (1.0 \text{ kg}) \left(-10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{1.0 \text{ kg} - (1) (0.5 \text{ kg})} = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

En consecuencia, la velocidad final del primer cuerpo es de $v_1 = 32 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y la velocidad inicial del segundo cuerpo es de $v_{0_2} = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, por lo que ambos cuerpos se van a mover en sentido contrario a la dirección en la que se movían antes de la colisión. Si calculáramos la energía cinética inicial y final del sistema, veríamos que ambas cantidades serían iguales ya que en una colisión elástica la energía cinética del sistema se conserva. Para este caso la energía total del sistema es igual a $E_c = 306 \text{ J}$

Ejemplo 5.16

Supongamos ahora que un cuerpo de $m_1 = 1.5 \text{ kg}$ de masa se mueve con una velocidad inicial de $v_{0_1} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y choca de frente contra otro cuerpo de $m_2 = 1.0 \text{ kg}$ de masa con una velocidad inicial de $v_{0_2} = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Después de la colisión este cuerpo adquiere una velocidad de $v_2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcule la velocidad final del primer cuerpo y el coeficiente de restitución.

Solución:

Utilizamos la ecuación 5.6 y despejamos la velocidad v_1 , es decir:

$$v_1 = v_2 - e(v_{0_1} - v_{0_2})$$

Y la sustituimos en la ecuación 5.4

$$m_1 v_{0_1} + m_2 v_2 = m_1 (v_2 - e(v_{0_1} - v_{0_2})) + m_2 v_2$$

Al despejar e , obtenemos:

$$e = \frac{m_1(v_2 - v_{0_1}) + m_2(v_2 - v_{0_2})}{m_1(v_{0_1} - v_{0_2})} \quad 5.17$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación 5.17 en la ecuación para v_1 , obtenemos:

$$v_1 = \frac{m_1 v_{0_1} + m_2(v_{0_2} - v_2)}{m_1(v_{0_1} - v_{0_2})} \quad 5.18$$

Sustituyendo los valores del problema, se tiene que:

$$e = \frac{(1.5 \text{ kg}) \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) + (1.0 \text{ kg}) \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(-5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\right)}{(1.5 \text{ kg}) \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(-5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\right)} = 0.67$$

Y

$$v_1 = \frac{(1.5 \text{ kg}) \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) + (1.0 \text{ kg}) \left(-5 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{(1.5 \text{ kg}) \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(-5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\right)} = 0$$

Ejemplo 5.17

Supongamos ahora que un cuerpo se mueve con una velocidad inicial de $v_{0_1} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y choca de frente contra otro cuerpo de $m_2 = 1.0 \text{ kg}$ de masa con una velocidad inicial de $v_{0_2} = -15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Después de la colisión el primer cuerpo adquiere una velocidad de $v_1 = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Si el coeficiente de restitución es $e = 0.5$, calcule la velocidad final del segundo cuerpo y la masa del primer cuerpo.

Solución:

Utilizamos la ecuación 5.6 y despejamos la velocidad v_2 , es decir:

$$v_2 = v_1 + e(v_{0_1} - v_{0_2})$$

Y la sustituimos en la ecuación 5.4

$$m_1 v_{0_1} + m_2 v_{0_2} = m_1 v_1 + m_2 (v_1 + e(v_{0_1} - v_{0_2}))$$

Al despejar m_1 , obtenemos:

$$m_1 = \frac{m_2(v_1 + e v_{0_1} - v_{0_2}(1+e))}{v_{0_1} - v_1} \quad 5.19$$

Sustituyendo los valores correspondientes con el problema, obtenemos:

$$v_2 = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}} + (0.5) \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(-15 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\right) = 7.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Y

$$m_1 = \frac{(1.0 \text{ kg}) \left(-5 \frac{\text{m}}{\text{s}} + (0.5) \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) - \left(-15 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) (1 + 0.5)\right)}{\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(-5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\right)} = 1.5 \text{ kg}$$

Ejemplo 5.18

Supongamos ahora que un cuerpo de $m_1 = 2.0 \text{ kg}$ de masa se mueve con una velocidad inicial de $v_{0_1} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y choca de frente contra otro cuerpo de $m_2 = 1.0 \text{ kg}$ de masa con una velocidad inicial de $v_{0_2} = -15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Después de la colisión el primer cuerpo adquiere una velocidad de $v_1 = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcule la velocidad final del segundo cuerpo y el coeficiente de restitución.

Solución:

Utilizamos la ecuación 5.6 y despejamos la velocidad v_2 , es decir:

$$v_2 = v_1 + e(v_{0_1} - v_{0_2})$$

Y la sustituimos en la ecuación 5.4

$$m_1 v_{0_1} + m_2 v_{0_2} = m_1 v_1 + m_2 (v_1 + e(v_{0_1} - v_{0_2}))$$

Al despejar e , obtenemos:

$$e = \frac{m_1(v_{0_1} - v_1) + m_2(v_{0_2} - v_1)}{m_2(v_{0_1} - v_{0_2})} \quad 5.20$$

Despejando v_2 de la ecuación 5.4, tenemos:

$$v_2 = \frac{m_1(v_{0_1} - v_1) + m_2 v_{0_2}}{m_2} \quad 5.21$$

Sustituyendo los valores correspondientes con el problema, se tiene:

$$e = \frac{(2.0 \text{ kg}) \left(8 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(-5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\right) + (1.0 \text{ kg}) \left(-15 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(-5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\right)}{(1.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}) \left(8 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(-15 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\right)} = 0.695$$

Y

$$v_2 = \frac{(2.0 \text{ kg}) \left(8 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(-5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \right) + (1.0 \text{ kg}) \left(-15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)}{1.0 \text{ kg}} = 11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

En consecuencia, el coeficiente de restitución e se encuentra entre cero y uno y la velocidad final del segundo cuerpo es de $v_2 = 11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Si calculáramos la energía cinética inicial y final del sistema, veríamos que ambas cantidades serían diferentes ya que en una colisión inelástica la energía cinética del sistema no se conserva.

Ejemplo 5.19

Supongamos ahora que un cuerpo se mueve con una velocidad inicial de $v_{01} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y choca de frente contra otro cuerpo de $m_2 = 3.0 \text{ kg}$ de masa con una velocidad inicial de $v_{02} = -15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Después de la colisión el primer cuerpo adquiere una velocidad de $v_1 = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y el segundo cuerpo adquiere una velocidad de $v_2 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcule la masa del primer cuerpo y el coeficiente de restitución.

Solución:

Utilizamos la ecuación 5.6 y despejamos el coeficiente de restitución e , es decir:

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{01} - v_{02}}$$

Y utilizando la ecuación 5.4

$$m_1 = \frac{m_2 (v_2 - v_{02})}{v_{01} - v_1} \quad 5.22$$

Sustituyendo los valores correspondientes con el problema, se tiene:

$$e = \frac{5 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(-10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)}{5 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(-15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)} = 0.75$$

Y

$$m_1 = \frac{(3 \text{ kg}) \left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(-15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \right)}{5 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(-10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)} = 4 \text{ kg}$$

En consecuencia, el coeficiente de restitución se encuentra entre cero y uno, lo cual no es una colisión ni completamente inelástica ni completamente elástica. Como no es igual a uno el coeficiente de restitución, la energía cinética del sistema no se conserva.

Ejemplo 5.20

Supongamos ahora que un cuerpo de $m_1 = 4.0 \text{ kg}$ de masa se mueve con una velocidad inicial de $v_{01} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y choca de frente contra otro cuerpo que se mueve con una velocidad inicial de $v_{02} = -15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Después de la colisión el primer cuerpo adquiere una velocidad de $v_1 = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Si el coeficiente de restitución es igual a $e = 0.4$, calcule la velocidad final y masa del segundo cuerpo.

Solución:

Utilizamos la ecuación 5.6 y despejamos la velocidad final del segundo cuerpo, es decir:

$$v_2 = v_1 + e (v_{01} - v_{02})$$

Y utilizando la ecuación 5.4

$$m_2 = \frac{m_1 (v_1 - v_{01})}{v_{02}(1+e) - v_1 - e v_{01}} \quad 5.23$$

Sustituyendo los valores correspondientes con el problema, se tiene:

$$v_2 = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}} + (0.4) \left(8 \frac{\text{m}}{\text{s}} - \left(-15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \right) = -0.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Y

$$m_2 = \frac{(4.0 \text{ kg}) \left(-10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)}{\left(-15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) (1 + 0.4) - \left(-10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) - (0.4) \left(8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)} = 5.07 \text{ kg}$$

En consecuencia, la velocidad final del segundo cuerpo es de $v_2 = -0.8 \frac{m}{s}$ y su masa es de $m_2 = 5.07 \text{ kg}$. La dirección con la que se mueve el segundo cuerpo después de la colisión es la misma que la dirección que lleva el cuerpo antes de la colisión. No sucede lo mismo con el primer cuerpo, ya que cambia de dirección después de la colisión.

Ejemplo 5.21

Calcular las velocidades después de la colisión de dos cuerpos de masas m_1 y m_2 si una de ellas estaba en reposo antes de la colisión.

Solución:

Al utilizar la ecuación 5.4 vemos que se simplifica de la siguiente forma:

$$m_1 v_{0_1} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad 5.24$$

Y

$$\frac{1}{2} m_1 v_{0_1}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad 5.25$$

Despejando v_2 en la primera ecuación y sustituyéndola en la segunda, obtenemos:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{0_1}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\frac{m_1}{m_2} (v_{0_1} - v_1) \right]^2$$

Es decir:

$$m_2 (v_{0_1} - v_1)(v_{0_1} + v_1) = m_1 (v_{0_1} - v_1)(v_{0_1} - v_1)$$

Finalmente, se tiene:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{(v_{0_1} - v_1)(v_{0_1} + v_1)}{(v_{0_1} - v_1)(v_{0_1} - v_1)} = \frac{(v_{0_1} + v_1)}{(v_{0_1} - v_1)}$$

Por lo que:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{(v_{0_1} + v_1)}{(v_{0_1} - v_1)} \quad 5.26$$

Este resultado nos indica que la velocidad inicial y final del primer cuerpo está en función de las masas de los cuerpos. Si ambas masas fueran iguales, la ecuación 5.26 se convertiría en:

$$(v_{0_1} + v_1) = (v_{0_1} - v_1)$$

Por lo que:

$$v_1 = 0$$

El resultado anterior nos indica que la velocidad del primer cuerpo sería igual a cero después de la colisión y toda esa velocidad se la transmitiría al segundo cuerpo, ya que al utilizar la ecuación 5.20 veríamos que:

$$v_{0_1} = v_2$$

En este caso los cuerpos intercambian velocidades y energías cinéticas.

Ejemplo 5.22

Calcule las velocidades finales de ambos cuerpos, considerando que la masa del primer cuerpo fuese mayor que la masa del segundo cuerpo.

Solución:

Si la masa del primer cuerpo es mayor que la masa del segundo cuerpo, entonces el cociente de m_1 entre m_2 se puede escribir como:

$$\frac{k m_2}{m_2} = k = \frac{(v_{0_1} + v_1)}{(v_{0_1} - v_1)}$$

Con $m_1 = k m_2$ y $k \geq 1$

Por lo que la velocidad final del primer cuerpo es igual a:

$$v_1 = v_{0_1} \frac{(k-1)}{k+1} \quad 5.27$$

Si hacemos crecer mucho el valor de k , lo que equivale a que la masa m_1 fuese mucho mayor que m_2 , tendríamos lo siguiente:

$$v_{0_1} = v_1$$

Este resultado nos indica que la velocidad final del primer cuerpo, al chocar contra otro cuya masa es mucho menor, es prácticamente igual a la velocidad que tenía antes de la colisión. No modifica su velocidad al chocar contra un cuerpo que tiene una masa mucho menor.

Para conocer la velocidad final del segundo cuerpo, sustituyamos la ecuación 5.27 en la ecuación 5.24, es decir:

$$m_1 v_{0_1} = m_1 \left[v_{0_1} \frac{(k-1)}{(k+1)} \right] + m_2 v_2$$

Despejando v_2 , tenemos:

$$v_2 = v_{0_1} \left[\frac{2k}{(k+1)} \right] \quad 5.28$$

Si hacemos crecer mucho el valor de k , lo que equivale a que la masa m_1 fuese mucho mayor que m_2 , tendríamos lo siguiente:

$$v_2 = 2v_{0_1}$$

O sea que la velocidad del cuerpo mucho más pequeño es el doble de la velocidad del cuerpo mucho más grande después de la colisión.

Ejemplo 5.23

Calcule las velocidades finales de ambos cuerpos, considerando que la masa del primer cuerpo fuese menor que la masa del segundo cuerpo.

Solución:

Si la masa del primer cuerpo fuese menor que la masa del segundo cuerpo, entonces el cociente de m_1 entre m_2 se puede escribir como:

$$\frac{m_2}{k m_2} = \frac{1}{k} = \frac{(v_{0_1} + v_1)}{(v_{0_1} - v_1)}$$

Con $m_2 = k m_1$ y $k \geq 1$

Por lo que la velocidad final del primer cuerpo es igual a:

$$v_1 = v_{0_1} \frac{(1-k)}{(k+1)} \quad 5.29$$

Si hacemos crecer mucho el valor de k , lo que equivale a que la masa m_2 fuese mucho mayor que m_1 , tendríamos lo siguiente:

$$v_{0_1} = -v_1$$

Este resultado nos indica que la velocidad final del primer cuerpo, al chocar contra otro cuya masa es mucho mayor, es igual sólo que en dirección contraria. Es decir, rebota con la misma velocidad.

Para conocer la velocidad final del segundo cuerpo, sustituyamos la ecuación 5.29 en la ecuación 5.24, es decir:

$$m_1 v_{0_1} = m_1 \left[v_{0_1} \frac{(1-k)}{(k+1)} \right] + m_2 v_2$$

Despejando v_2 , tenemos:

$$v_2 = v_{01} \left[\frac{2}{(k+1)} \right] \quad 5.30$$

Si hacemos crecer mucho el valor de k , lo que equivale a que la masa m_2 fuese mucho mayor que m_1 , tendríamos lo siguiente: $v_2 = 0$

O sea que la velocidad del cuerpo con masa mucho más grande sería igual a cero. Prácticamente no se movería el cuerpo de mucha mayor masa, permanecería en reposo.

5.7 ¿Cuánto tarda una pelota en dejar de botar?

Alguna vez se ha preguntado ¿cuánto tiempo tarda una pelota en dejar de botar al ser soltada desde una cierta altura? La solución a esta interrogante involucra los temas de caída libre y colisiones elásticas, lo que incluye los conceptos de velocidad, aceleración de la gravedad y coeficiente de restitución. Así, la velocidad con la que rebotará la pelota dependerá del valor de la velocidad con la que llegue al suelo y del coeficiente de restitución entre la superficie y la pelota. En una colisión perfectamente inelástica el coeficiente de restitución será igual a cero y la pelota se quedará adherida al suelo después del primer rebote. En una colisión perfectamente elástica, el coeficiente de restitución será igual a uno, por lo que la pelota rebotará con la misma velocidad con la que llegue al suelo, siguiendo este movimiento indefinidamente. Si el coeficiente de restitución se encuentra entre cero y uno, que es la mayor parte de las colisiones, la velocidad de la pelota irá disminuyendo en cada rebote hasta que se detenga. De esta forma, el tiempo que tarde la pelota en dejar de botar será igual a la suma de los tiempos que tarda la pelota en cada rebote. Esta suma corresponde a una suma infinita, la cual está identificada con una expresión particular. En este trabajo se deduce tal expresión.

De muchos es conocido que el tiempo que tarda un objeto en caer desde una cierta altura, es un problema que ha sido resuelto desde hace mucho tiempo. De hecho, este tipo de movimientos están clasificados dentro de lo que se conoce como movimiento uniformemente acelerado o movimiento en una dimensión con aceleración constante, en donde el cuerpo se mueve en línea recta y con aceleración constante, es decir, la velocidad cambia uniformemente para iguales intervalos de tiempo. En el caso de cuerpos que se muevan bajo la acción de la gravedad de la tierra, el valor de la magnitud de la aceleración con la que se moverán los cuerpos en caída libre es de $a = g = 9.81 \text{ m/s}^2$. En consecuencia, el tiempo que tarda en llegar al suelo un objeto que se ha soltado desde una cierta altura, es igual a:

$$t_0 = \frac{v_0}{g} \quad 5.31$$

Donde v_0 es la magnitud de la velocidad del objeto justo antes de llegar al suelo; g es la magnitud de la aceleración de la gravedad y t_0 es el tiempo que tarda el objeto en llegar al suelo. Si el objeto es una pelota con un coeficiente de restitución e entre ella y el piso, y además la colisión es unidimensional, entonces la magnitud de la velocidad con la que rebotará será igual a [4]:

$$v_1 = e v_0 \quad 5.32$$

Donde v_0 es la magnitud de la velocidad del objeto antes del rebote y v_1 es la magnitud de la velocidad después del mismo. Por lo tanto, el tiempo que tardará la pelota en llegar de nuevo al piso será igual a:

$$t_1 = 2 \frac{v_1}{g} = 2 e \frac{v_0}{g} \quad 5.33$$

Para el tercer movimiento, se tiene que el tiempo que tardará en llegar de nuevo al suelo será de:

$$t_2 = 2 \frac{v_2}{g} = 2 e \frac{v_1}{g} = 2 e^2 \frac{v_0}{g} \quad 5.34$$

En consecuencia, el tiempo que tardará la pelota en dejar de botar es igual a la suma infinita de los tiempos que utilice en cada rebote, es decir:

$$t_{total} = t_0 + t_1 + t_2 + \dots \quad 5.35$$

Lo que equivale a:

$$t_{total} = \frac{v_0}{g} + 2 e \frac{v_0}{g} + 2 e^2 \frac{v_0}{g} + 2 e^3 \frac{v_0}{g} + \dots \quad 5.36$$

Al factorizar, se tiene:

$$t_{total} = \frac{2v_0}{g} (1 + e + e^2 + e^3 + \dots) - \frac{v_0}{g} \quad 5.37$$

La suma que se encuentra entre paréntesis es una serie infinita convergente para $e < 1$ y está identificada con la siguiente igualdad [5]:

$$1 + e + e^2 + e^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} e^i = \frac{1}{1-e} \quad 5.38$$

Por lo que la ecuación 7 toma la forma siguiente:

$$t_{total} = \frac{2v_0}{g} \left[\frac{1}{1-e} \right] - \frac{v_0}{g} \quad 5.39$$

Como generalmente es difícil conocer la velocidad v_0 con la que llega la pelota al suelo en el primer rebote, creemos conveniente expresar la ecuación anterior en función de la altura a la que se deja caer el cuerpo, es decir:

$$t_{total} = 2 \left(\frac{2h_0}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{1-e} \right] - \left(\frac{2h_0}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \quad 5.40$$

Donde:

$$v_0 = (2gh_0)^{\frac{1}{2}} \quad 5.41$$

con h igual a la altura a la que se suelta la pelota. Para calcular experimentalmente el coeficiente de restitución, se deja caer la pelota desde una altura determinada y se mide la altura a la que llega después del primer bote. Con este par de datos se puede calcular este coeficiente con solo sustituir en la siguiente ecuación [6]:

$$e = \frac{v_1}{v_0} = \left[\frac{h_1}{h_0} \right]^{\frac{1}{2}} \quad 5.42$$

Donde v_0 es la velocidad con la que llega la pelota al suelo y v_1 es la velocidad de la pelota después del rebote; h_0 es la altura desde la que es soltada la pelota y h_1 es la altura a la que llega la pelota después del rebote. Así, el coeficiente resultante es una propiedad conjunta de la pelota y de la superficie de rebote. En esta expresión estamos suponiendo que la masa de la superficie en la que rebota la pelota es muy grande debido a que se encuentra fija sobre la superficie terrestre. En consecuencia, la velocidad de la superficie en la que golpea la pelota no cambia después de la colisión.

Con las ecuaciones 10 y 12 es posible calcular teóricamente el tiempo que tarda una pelota en dejar de botar al ser soltada desde una altura h_0 .

En esta deducción estamos suponiendo que el coeficiente de restitución es independiente de la velocidad con la que se lleva a cabo la colisión entre la pelota y el suelo. Sin embargo, esta hipótesis no es del todo verdadera, ya que se ha notado que el coeficiente de restitución varía en función de la altura desde la cual es soltada. Este trabajo no tiene por objetivo deducir esta dependencia.

En la ecuación 10 observamos que si el coeficiente de restitución es igual a cero, la pelota no rebotaría, quedando pegada al suelo. En este caso el tiempo total se simplificaría a:

$$t_{total} = \left(\frac{2h_0}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \quad 5.43$$

Por otra parte, si el coeficiente de restitución es igual a 1, al sustituir en la ecuación 7 se observará que el tiempo total tenderá a un valor infinito, es decir:

$$t_{total} = \left[\frac{2v_0}{g} (1 + 1 + 1^2 + 1^3 + \dots) - \frac{v_0}{g} \right] \rightarrow \infty \quad 5.44$$

Que corresponde al tiempo que tarda una pelota que siempre rebota hasta la misma altura.

A pesar de que la suma de los tiempos que tarda una pelota en cada rebote es infinita, el resultado converge a un valor determinado que corresponde con el tiempo total del movimiento.

5.8 Colisiones en dos dimensiones

En la sección anterior, analizamos el comportamiento de las colisiones en una dimensión. Las colisiones en una dimensión son aquellas en las cuales se llevan a cabo en una línea recta. En esta sección analizaremos aquellas colisiones en las cuales se llevan a cabo en un plano. Es decir, aquellas colisiones en las cuales los cuerpos se desplazan en dos dimensiones. Para describir las colisiones en un plano, es necesario describirlos por medio de dos coordenadas. Si queremos describir las colisiones en un plano cartesiano, las velocidades de los cuerpos que colisionan deben ser dos: una en la dirección del eje de las abscisas y la otra en la dirección del eje de las ordenadas. De esta forma, las ecuaciones para el momento lineal en cada una de las direcciones, son las siguientes:

$$m_1 v_{0_1} \cos \theta_{0_1} + m_2 v_{0_2} \cos \theta_{0_2} = m_1 v_1 \cos \theta_1 + m_2 v_2 \cos \theta_2 \quad 5.45$$

Y

$$m_1 v_{01} \text{seno} \theta_{01} + m_2 v_{02} \text{seno} \theta_{02} = m_1 v_1 \text{seno} \theta_1 + m_2 v_2 \text{seno} \theta_2 \quad 5.46$$

Donde: m_1 y m_2 son las masas de los cuerpos que colisionan, v_{01} y v_{02} son las velocidades iniciales, θ_{01} y θ_{02} son las direcciones del movimiento de los cuerpos antes de la colisión, v_1 y v_2 son las velocidades de los cuerpos después de la colisión y θ_1 y θ_2 son las direcciones del movimiento de los cuerpos después de la colisión.

De las ecuaciones 5.45 y 5.46 vemos que en cada dirección se debe conservar la cantidad de movimiento. El número de variables que intervienen en una colisión bidimensional de dos cuerpos es de 10. Por ello es necesario conocer 8 de ellas para que pueda ser resuelto un problema ya que sólo existen dos ecuaciones. De hecho es necesario que se conozcan al menos tres de las cuatro direcciones que intervienen en la colisión debido a que si se conocen sólo dos de ellas, es muy difícil conocer las otras dos restantes.

Ejemplo 5.24

Un automóvil de $m_1 = 1\,500\text{ kg}$ de masa que se dirige hacia el norte a $v_{01} = 20\frac{m}{s}$, choca contra otro automóvil de $m_2 = 2\,000\text{ kg}$ de masa que viaja hacia el oeste a $v_{02} = 15\frac{m}{s}$. Si después de la colisión los automóviles permanecen pegados, ¿con qué velocidad y en qué dirección se desplazarán?

Solución:

La dirección inicial del primer automóvil es $\theta_{01} = 90^\circ$ y la del segundo es de $\theta_{02} = 180^\circ$ por dirigirse al oeste. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones 5.45 y 5.46, se tiene:

$$(1\,500\text{ kg})\left(20\frac{m}{s}\right)(\cos 90^\circ) + (2\,000\text{ kg})\left(15\frac{m}{s}\right)(\cos 180^\circ) = (3\,500\text{ kg})v \cos \theta$$

Y

$$(1\,500\text{ kg})\left(20\frac{m}{s}\right)(\text{seno } 90^\circ) + (2\,000\text{ kg})\left(15\frac{m}{s}\right)(\text{seno } 180^\circ) = (3\,500\text{ kg})v \text{seno } \theta$$

Es decir:

$$0 - 30\,000\text{ kg} \frac{m}{s} = (3\,500\text{ kg})v \cos \theta$$

Y

$$30\,000\text{ kg} \frac{m}{s} + 0 = (3\,500\text{ kg})v \text{seno} \theta$$

Dividiendo ambas ecuaciones, se tiene:

$$\tan \theta = -1$$

Por lo que:

$$\theta = 135^\circ$$

La dirección en la que se moverán los automóviles es noroeste.

Sustituyendo esta dirección en cualquiera de las dos ecuaciones, se tiene que la velocidad con la que se moverán los automóviles es igual a:

$$v = \frac{-30\,000\text{ kg} \frac{m}{s}}{(3\,500\text{ kg}) \cos(135^\circ)} = 12.12\frac{m}{s}$$

Problema 5.22

Un camión de $m_1 = 7\,500\text{ kg}$ de masa que viaja a una velocidad de $v_{0_1} = 5\frac{m}{s}$ hacia el este, choca contra un automóvil de $m_2 = 1\,500\text{ kg}$ de masa que se mueve con una velocidad de $v_{0_2} = 20\frac{m}{s}$, siguiendo una dirección de $\theta_{0_2} = 30^\circ$ suroeste. Después de la colisión los dos vehículos quedan unidos. ¿Con qué velocidad y en qué dirección se moverán los vehículos después del impacto?

Solución:

La dirección inicial del primer automóvil es $\theta_{0_1} = 0^\circ$ y la del segundo es de $\theta_{0_2} = 210^\circ$ por dirigirse al suroeste. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones 5.20 y 5.21, se tiene:

$$(7\,500\text{ kg})\left(5\frac{m}{s}\right)(\cos 0^\circ) + (1\,500\text{ kg})\left(20\frac{m}{s}\right)(\cos 210^\circ) = (9\,000\text{ kg})v \cos \theta$$

Y

$$(7\,500\text{ kg})\left(5\frac{m}{s}\right)(\text{seno } 0^\circ) + (1\,500\text{ kg})\left(20\frac{m}{s}\right)(\text{seno } 210^\circ) = (9\,000\text{ kg})v \text{ seno } \theta$$

Es decir:

$$11\,519.24\text{ kg}\frac{m}{s} = (9\,000\text{ kg})v \cos \theta$$

Y

$$-15\,000\text{ kg}\frac{m}{s} = (9\,000\text{ kg})v \text{ seno } \theta$$

Dividiendo ambas ecuaciones, se tiene:

$$\tan \theta = -1.30$$

Por lo que:

$$\theta = -52.48^\circ$$

La dirección en la que se moverán los automóviles es sureste.

Sustituyendo esta dirección en cualquiera de las dos ecuaciones, se tiene que la velocidad con la que se moverán los automóviles es igual a:

$$v = \frac{11\,519.24\text{ kg}\frac{m}{s}}{(9\,000\text{ kg})\cos(-52.48^\circ)} = 2.10\frac{m}{s}$$

Equivalentemente

$$v = \frac{-15\,000\text{ kg}\frac{m}{s}}{(9\,000\text{ kg})\text{seno } (-52.48^\circ)} = 2.10\frac{m}{s}$$

Problema 5.23

Una bola de $m_1 = 0.8\text{ kg}$ de masa que viaja a una velocidad de $v_{0_1} = 0.3\frac{m}{s}$ hacia el este, choca contra otra bola de $m_2 = 0.5\text{ kg}$ de masa que se mueve con una velocidad de $v_{0_2} = 0.5\frac{m}{s}$ hacia el oeste. Después de la colisión la primera bola se mueve con una velocidad de $v_1 = 0.15\frac{m}{s}$ con una dirección

de $\theta_1 = 30^\circ$ sureste. ¿Cuál es la velocidad y dirección final de la segunda bola?

Solución:

La dirección inicial de la primera bola es $\theta_{01} = 0^\circ$ y la de la segunda bola es de $\theta_{02} = 180^\circ$ por dirigirse al oeste. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones 5.20 y 5.21, se tiene:

$$(0.8 \text{ kg}) \left(0.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) (\cos 0^\circ) + (0.5 \text{ kg}) \left(0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) (\cos 180^\circ) = \\ (0.8 \text{ kg}) \left(0.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) (\cos 330^\circ) + (0.5 \text{ kg}) v_2 (\cos \theta_2)$$

Y

$$(0.8 \text{ kg}) \left(0.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) (\text{seno } 0^\circ) + (0.5 \text{ kg}) \left(0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) (\text{seno } 180^\circ) = \\ (0.8 \text{ kg}) \left(0.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) (\text{seno } 330^\circ) + (0.5 \text{ kg}) v_2 (\text{seno } \theta_2)$$

Es decir:

$$-0.217 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} = (0.5 \text{ kg}) v_2 \cos \theta_2$$

Y

$$0.12 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} = (0.5 \text{ kg}) v_2 \text{ seno } \theta_2$$

Dividiendo ambas ecuaciones, se tiene:

$$\tan \theta_2 = -0.553$$

Por lo que:

$$\theta = 151.06^\circ$$

La dirección en la que se moverán los automóviles es sureste.

Sustituyendo esta dirección en cualquiera de las dos ecuaciones, se tiene que la velocidad con la que se moverán los automóviles es igual a:

$$v_2 = \frac{-0.217 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(0.5 \text{ kg}) \cos(151.06^\circ)} = 0.4959 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Equivalentemente

$$v_2 = \frac{0.12 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}}{(0.5 \text{ kg}) \text{ seno } (151.06^\circ)} = 0.4959 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Problema 5.24

Una bola de masa m_1 moviéndose con una velocidad inicial v_{01} , choca contra otro cuerpo de masa m_2 que se encuentra en reposo ($v_{02} = 0$). Después de la colisión la bola de masa m_1 se mueve con una dirección θ_1 y una velocidad v_1 , mientras que la bola de masa m_2 se mueve con una dirección θ_2 y con una velocidad v_2 . Obtenga las expresiones que describen este tipo de colisión.

Solución:

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones 5.45 y 5.46, obtenemos:

$$m_1 v_{01} = m_1 v_1 \cos \theta_1 + m_2 v_2 \cos \theta_2 \quad 5.47$$

Y

$$m_1 v_1 \text{ seno } \theta_1 + m_2 v_2 \text{ seno } \theta_2 = 0 \quad 5.48$$

O

$$m_1 v_1 \text{seno} \theta_1 = -m_2 v_2 \text{seno} \theta_2 \quad 5.49$$

La segunda ecuación es igual a cero ya que el momento lineal inicial en la dirección vertical es igual a cero por no tener componentes en esa dirección.

En consecuencia, en cualquier colisión entre dos cuerpos, uno inicialmente en reposo, las ecuaciones anteriores son válidas.

En el caso en que la colisión sea perfectamente elástica, la energía cinética es la misma antes y después de la colisión, por lo que:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Como:

$$m_1 v_1 \text{seno} \theta_1 = -m_2 v_2 \text{seno} \theta_2 = -m_2 v_2 (1 - \cos^2 \theta_2)^{\frac{1}{2}}$$

Elevando al cuadrado y despejando la función coseno, se tiene:

$$\cos \theta_2 = \left(\frac{m_2^2 v_2^2 - m_1^2 v_1^2 \text{sen}^2 \theta_1}{m_2^2 v_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad 5.50$$

Sustituyendo la ecuación 5.50 en la ecuación 5.47, se tiene:

$$m_1 v_{01} = m_1 v_1 \cos \theta_1 + m_2 v_2 \left(\frac{m_2^2 v_2^2 - m_1^2 v_1^2 \text{sen}^2 \theta_1}{m_2^2 v_2^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad 5.51$$

Despejando la raíz cuadrada y elevando al cuadrado, se tiene:

$$\cos \theta_1 = \frac{m_1^2 v_{01}^2 + m_1^2 v_1^2 - m_2^2 v_2^2}{2 m_1^2 v_{01} v_1} \quad 5.52$$

Como:

$$m_2^2 v_2^2 = m_1 m_2 (v_{01}^2 - v_1^2) \quad 5.53$$

Sustituyendo la ecuación 5.53 en la ecuación 5.52, tenemos finalmente:

$$\cos \theta_1 = \frac{v_{01}^2 + v_1^2 - \frac{m_2}{m_1} (v_{01}^2 - v_1^2)}{2 v_{01} v_1} \quad 5.54$$

Esta ecuación es válida para el caso en que una bola choca contra otra y se desvía un ángulo θ_1 . La otra dirección se puede calcular sustituyendo este resultado en la ecuación 5.47 y despejando $\cos \theta_2$. Es decir:

$$\cos \theta_2 = \frac{(m_1 + m_2)}{2 v_{01}} \left(\frac{v_{01}^2 - v_1^2}{m_1 m_2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad 5.55$$

Ejemplo 5.25

Una esfera perfectamente elástica con una masa de $m_1 = 8.0 \text{ kg}$ moviéndose con una velocidad de $v_{01} = 6.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, colisiona con otra esfera perfectamente elástica de $m_2 = 5.0 \text{ kg}$ de masa, inicialmente en

reposo. Después de la colisión la primera esfera se desplaza a una velocidad de $v_1 = 4.0 \frac{m}{s}$. Hallar la dirección de m_1 , y la velocidad y dirección de m_2 .

Solución:

Utilizando la ecuación 5.55, se tiene:

$$\theta_1 = \cos^{-1} \left(\frac{(6.0 \text{ m/s})^2 + (4.0 \text{ m/s})^2 - \frac{(5.0 \text{ kg})}{(8.0 \text{ kg})} ((6.0 \text{ m/s})^2 - (4.0 \text{ m/s})^2)}{2 \left(6.0 \frac{m}{s}\right) \left(4.0 \frac{m}{s}\right)} \right) = 34.62^\circ$$

Utilizando la ecuación 5.54, la dirección de m_2 es:

$$\theta_2 = \cos^{-1} \left(\frac{(8.0 \text{ kg} + 5.0 \text{ kg}) \left(\frac{(6.0 \text{ m/s})^2 - (4.0 \text{ m/s})^2}{(8.0 \text{ kg})(5.0 \text{ kg})} \right)^{\frac{1}{2}}}{2 \left(6.0 \frac{m}{s}\right)} \right) = 0.541$$

Finalmente, utilizando la ecuación 5.53, vemos que la velocidad del segundo cuerpo es igual a:

$$v_2 = \left(\frac{m_1(v_{01}^2 - v_1^2)}{m_2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{(8.0 \text{ kg})((6.0 \text{ m/s})^2 - (4.0 \text{ m/s})^2)}{5.0 \frac{m}{s}} \right)^{\frac{1}{2}} = 5.66 \frac{m}{s}$$

5.9 Preguntas y problemas

Preguntas

1. ¿Existirán coeficientes de restitución mayores a 1 o menores a cero? En caso afirmativo, ¿cuál sería su explicación física?
2. ¿Cuál es la diferencia entre una colisión elástica y una inelástica?
3. ¿Cuál es el fundamento teórico para establecer el coeficiente de restitución como lo indica la ecuación 5.6?
4. ¿Cuál es la relación entre el impulso y la cantidad de movimiento?

Problemas

1. Un cuerpo de $m_1 = 6.0 \text{ kg}$ de masa se mueve con una velocidad inicial de $v_{01} = 12 \frac{m}{s}$ y choca contra otro cuerpo de $m_2 = 10.0 \text{ kg}$ de masa que se mueve con una velocidad inicial de $v_{02} = -8 \frac{m}{s}$. Si el coeficiente de restitución es igual a $e = 0.4$, calcule la velocidad final de los dos cuerpos.

Sol. $v_{01} = -5.5 \frac{m}{s}$ y $v_{02} = 4.0 \frac{m}{s}$.

2. Un cuerpo de $m_1 = 16.0 \text{ kg}$ de masa se mueve con cierta velocidad inicial y choca contra otro cuerpo de $m_2 = 12.0 \text{ kg}$ de masa que se mueve con una velocidad inicial de $v_{02} = 8 \frac{m}{s}$. Si el coeficiente de restitución es igual a $e = 0.5$, calcule la velocidad final del primer cuerpo y la velocidad inicial del segundo cuerpo después de la colisión si la velocidad final del segundo cuerpo es de $v_2 = -4 \frac{m}{s}$.

Sol. $v_{01} = -6.0 \frac{m}{s}$ y $v_1 = 3.0 \frac{m}{s}$

3. Un cuerpo de $m_1 = 10.0 \text{ kg}$ de masa se mueve con una velocidad inicial de $v_{01} = 20.0 \frac{m}{s}$ y choca contra otro cuerpo de $m_2 = 15.0 \text{ kg}$ de masa que se mueve con cierta velocidad inicial. Si el coeficiente de restitución es igual a $e = 0.6$, calcule la velocidad final del primer cuerpo y la velocidad inicial del segundo cuerpo después de la colisión, si la velocidad final del segundo cuerpo es de $v_2 = -8 \frac{m}{s}$.

Sol. $v_1 = -54.66 \frac{m}{s}$ y $v_{02} = -57.77 \frac{m}{s}$.

4. Un cuerpo con cierta masa se mueve con una velocidad inicial de $v_{01} = 10.0 \frac{m}{s}$ y choca contra otro cuerpo de $m_2 = 15.0 \text{ kg}$ de masa que se mueve con una velocidad inicial de $v_{02} = -12 \frac{m}{s}$. Si el coeficiente de restitución es igual a $e = 0.3$, calcule la masa y la velocidad final del primer cuerpo después de la colisión, si la velocidad final del segundo cuerpo es de $v_2 = 12 \frac{m}{s}$.

Sol. $m_1 = 78.26 \text{ kg}$ y $v_1 = 5.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

5. Un cuerpo de $m_1 = 6.0 \text{ kg}$ de masa se mueve con una velocidad inicial de $v_{0_1} = 9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y choca contra otro cuerpo de cierta masa que se mueve con una velocidad inicial de $v_{0_2} = -12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Si el coeficiente de restitución es igual a $e = 0.2$, calcule la masa del segundo cuerpo y la velocidad final del primer cuerpo después de la colisión, si la velocidad final del segundo cuerpo es de $v_2 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Sol. $m_2 = 4.08 \text{ kg}$ y $v_1 = -1.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

6. Un cuerpo de $m_1 = 6.0 \text{ kg}$ de masa se mueve con una velocidad inicial de $v_{0_1} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y choca contra otro cuerpo de $m_2 = 4.0 \text{ kg}$ de masa que se mueve con una velocidad inicial de $v_{0_2} = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcule el coeficiente de restitución y la velocidad final del primer cuerpo después de la colisión, si la velocidad final del segundo cuerpo es de $v_2 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Sol. $e = 0.78$ y $v_1 = -0.38 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

7. Un cuerpo de $m_1 = 6.0 \text{ kg}$ de masa se mueve con cierta velocidad inicial y choca contra otro cuerpo de $m_2 = 4.0 \text{ kg}$ de masa que se mueve con una velocidad inicial de $v_{0_2} = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcule la velocidad inicial del primer cuerpo y la velocidad final del segundo cuerpo después de la colisión, si el coeficiente de restitución es de $e = 0.4$ y la velocidad final del primer cuerpo es de $v_1 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Sol. $v_{0_1} = 26.36 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $v_2 = -20.54 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

8. Un cuerpo de $m_1 = 8.0 \text{ kg}$ de masa se mueve con una velocidad inicial de $v_{0_1} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y choca contra otro cuerpo de $m_2 = 6.0 \text{ kg}$ de masa que se mueve con cierta velocidad inicial. Calcule la velocidad inicial y final del segundo cuerpo después de la colisión, si el coeficiente de restitución es de $e = 0.8$ y la velocidad final del primer cuerpo es de $v_1 = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Sol. $v_{0_2} = 13.18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $v_2 = 7.85 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

9. Un cuerpo con cierta masa se mueve con una velocidad inicial de $v_{0_1} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y choca contra otro cuerpo de $m_2 = 4.0 \text{ kg}$ de masa que se mueve con una velocidad inicial de $v_{0_2} = -4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcule la masa del primer cuerpo y la velocidad final del segundo cuerpo después de la colisión, si el coeficiente de restitución es de $e = 0.3$ y la velocidad final del primer cuerpo es de $v_1 = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Sol. $m_1 = 0.85 \text{ kg}$ y $v_2 = -0.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

10. Un cuerpo de $m_1 = 7.0 \text{ kg}$ de masa se mueve con una velocidad inicial de $v_{0_1} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y choca contra otro cuerpo con cierta de masa que se mueve con una velocidad inicial de $v_{0_2} = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcule la masa y la velocidad final del segundo cuerpo después de la colisión, si el coeficiente de restitución es de $e = 0.5$ y la velocidad final del primer cuerpo es de $v_1 = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Sol. $m_2 = 77.0 \text{ kg}$ y $v_2 = 0.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

11. Un cuerpo de $m_1 = 10.0 \text{ kg}$ de masa se mueve con una velocidad inicial de $v_{0_1} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y choca contra otro cuerpo de $m_2 = 4.0 \text{ kg}$ de masa que se mueve con una velocidad inicial de $v_{0_2} = -10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcule la velocidad final del segundo cuerpo después de la colisión y el coeficiente de restitución, si la velocidad final del primer cuerpo es de $v_1 = -2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Sol. $v_2 = 15.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $e = 0.94$.

12. Un cuerpo de $m_1 = 15.0 \text{ kg}$ de masa se mueve con cierta velocidad inicial y choca contra otro cuerpo de $m_2 = 10.0 \text{ kg}$ de masa que se mueve con cierta velocidad inicial. Calcule la velocidad inicial de ambos cuerpos después de la colisión, si la velocidad final del primer cuerpo es de $v_1 = -5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y la velocidad final del segundo cuerpo es de $v_2 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y el coeficiente de restitución es de $e = 0.7$.

Sol. $v_{0_1} = 9.57 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y $v_{0_2} = -11.85 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

13. Un cuerpo con cierta masa se mueve con una determinada velocidad inicial y choca contra otro cuerpo de $m_2 = 20.0 \text{ kg}$ de masa que se mueve con una velocidad inicial de $v_{0_2} = -15.0 \frac{m}{s}$. Calcule la masa y la velocidad inicial del primer cuerpo después de la colisión, si la velocidad final del primer cuerpo es de $v_1 = -5 \frac{m}{s}$, la velocidad final del segundo cuerpo es de $v_2 = 10 \frac{m}{s}$ y el coeficiente de restitución es de $e = 0.8$.

Sol. $m_1 = 57.14 \text{ kg}$ y $v_{0_1} = 3.75 \frac{m}{s}$.

14. Un cuerpo de $m_1 = 12 \text{ kg}$ masa se mueve con una determinada velocidad inicial y choca contra otro cuerpo con cierta masa que se mueve con una velocidad inicial de $v_{0_2} = -25.0 \frac{m}{s}$. Calcule la masa del segundo cuerpo y la velocidad inicial del primer cuerpo después de la colisión, si la velocidad final del primer cuerpo es de $v_1 = -15 \frac{m}{s}$, la velocidad final del segundo cuerpo es de $v_2 = 10 \frac{m}{s}$ y el coeficiente de restitución es de $e = 0.6$.

Sol. $v_{0_1} = 16.67 \frac{m}{s}$ y $m_2 = 10.86 \text{ kg}$.

15. Un cuerpo de $m_1 = 18.0 \text{ kg}$ masa se mueve con una determinada velocidad inicial y choca contra otro cuerpo de $m_2 = 8.0 \text{ kg}$ de masa que se mueve con una velocidad inicial de $v_{0_2} = -25.0 \frac{m}{s}$. Calcule la velocidad inicial del primer cuerpo después de la colisión y el coeficiente de restitución, si la velocidad final del primer cuerpo es de $v_1 = 10 \frac{m}{s}$ y la velocidad final del segundo cuerpo es de $v_2 = -10 \frac{m}{s}$.

Sol. $v_{0_1} = 16.67 \frac{m}{s}$ y $e = 0.48$.

16. Un cuerpo con una determinada masa se mueve con una velocidad inicial de $v_{0_1} = 12 \frac{m}{s}$ y choca contra otro cuerpo de $m_2 = 18.0 \text{ kg}$ de masa que se mueve con una determinada velocidad inicial. Calcule la masa del primer cuerpo y la velocidad inicial del segundo cuerpo después de la colisión, si la velocidad final del primer cuerpo es de $v_1 = 15 \frac{m}{s}$, la velocidad final del segundo cuerpo es de $v_2 = -10 \frac{m}{s}$ y el coeficiente de restitución es de $e = 1.0$.

Sol. $m_1 = 282 \text{ kg}$ y $v_{0_2} = 37 \frac{m}{s}$.

17. Un cuerpo de $m_1 = 22.0 \text{ kg}$ de masa se mueve con una velocidad inicial de $v_{0_1} = 8 \frac{m}{s}$ y choca contra otro cuerpo con determinada masa y velocidad inicial. Calcule la masa y la velocidad inicial del segundo cuerpo después de la colisión, si la velocidad final del primer cuerpo es de $v_1 = 20 \frac{m}{s}$, la velocidad final del segundo cuerpo es de $v_2 = -15 \frac{m}{s}$ y el coeficiente de restitución es de $e = 0.9$.

Sol. $m_2 = 4.27 \text{ kg}$ y $v_{0_2} = 46.89 \frac{m}{s}$.

18. Un cuerpo de $m_1 = 10.0 \text{ kg}$ de masa se mueve con una velocidad inicial de $v_{0_1} = -8 \frac{m}{s}$ y choca contra otro cuerpo con una masa de $m_2 = 18.0 \text{ kg}$ y determinada velocidad inicial. Calcule la velocidad inicial del segundo cuerpo después de la colisión y el coeficiente de restitución, si la velocidad final del primer cuerpo es de $v_1 = 15 \frac{m}{s}$ y la velocidad final del segundo cuerpo es de $v_2 = 5 \frac{m}{s}$.

Sol. $v_{0_2} = 17.78 \frac{m}{s}$ y $e = 0.388$.

19. Un cuerpo con determinada masa se mueve con una velocidad inicial de $v_{0_1} = -10 \frac{m}{s}$ y choca contra otro cuerpo con una determinada masa y una velocidad inicial de $v_{0_2} = 25.0 \frac{m}{s}$. Calcule las masas de ambos cuerpos, si la velocidad final del primer cuerpo es de $v_1 = 20 \frac{m}{s}$, la velocidad final del segundo cuerpo es de $v_2 = 15 \frac{m}{s}$ y el coeficiente de restitución es de $e = 0.2$.

Sol. No hay solución para este problema porque no existen dos ecuaciones que contengan las masas m_1 y m_2 .

20. Un cuerpo con determinada masa se mueve con una velocidad inicial de $v_{0_1} = -16.0 \frac{m}{s}$ y choca contra otro cuerpo con una masa de $m_2 = 18.0 \text{ kg}$ y velocidad inicial de $v_{0_2} = 20.0 \frac{m}{s}$. Calcule la masa del primer cuerpo después de la colisión y el coeficiente de restitución, si la velocidad final del primer

cuerpo es de $v_1 = 10 \frac{m}{s}$ y la velocidad final del segundo cuerpo es de $v_2 = 5 \frac{m}{s}$.

Sol. $m_1 = 10.38 \text{ kg}$ y $e = 0.138$.

21. Un cuerpo de $m_1 = 9.0 \text{ kg}$ de masa se mueve con una velocidad inicial de $v_{01} = 15 \frac{m}{s}$ y choca contra otro cuerpo con determinada masa y velocidad inicial de $v_{02} = -20.0 \frac{m}{s}$. Calcule la masa del segundo cuerpo después de la colisión y el coeficiente de restitución, si la velocidad final del primer cuerpo es de $v_1 = -10 \frac{m}{s}$ y la velocidad final del segundo cuerpo es de $v_2 = 5 \frac{m}{s}$.

Sol. $m_2 = 9 \text{ kg}$ y $e = 0.43$.

22. Una bola de marfil se deja soltar desde una altura de $h = 2.0 \text{ m}$ sobre una superficie lisa de acero. Si el coeficiente de restitución es de $e = 0.8$, hallar la altura en el primer, segundo y tercer rebote.

Sol. $h_1 = 0.72 \text{ m}$

23. Un balón de acero se deja caer sobre una superficie lisa de acero y se observa que el coeficiente de restitución es de $e = 0.95$. Si el balón es soltado desde una altura de $h = 1.0 \text{ m}$. ¿Cuántas veces rebotará a una altura mayor de $h = 0.5 \text{ m}$?

Sol. $h_1 = 0.9025 \text{ m}$, $h_2 = 0.8145 \text{ m}$ y $h_3 = 0.7350 \text{ m}$.

24. Una partícula atómica con una masa de $m_1 = 7.2 * 10^{-28} \text{ kg}$ se mueve con una velocidad de $v_{01} = 6.0 * 10^7 \frac{m}{s}$ colisiona contra otra partícula atómica cuya masa es igual a la mitad de la primera partícula y en reposo. Si la primera partícula se desvía un determinado ángulo y su velocidad es de $v_1 = 5.0 * 10^7 \frac{m}{s}$, hallar el ángulo, y la dirección y velocidad de la segunda partícula.

Sol. $\theta_1 = 22.3^\circ$, $\theta_2 = 54.1^\circ$ y $v_2 = 4.69 * 10^7 \frac{m}{s}$.

25. Calcule el tiempo que tarda en dejar de botar un balón de acero cuyo coeficiente de restitución es igual a $e = 0.8$ y se deja caer desde una altura de $h_0 = 5.0 \text{ m}$.

Sol. $t_{total} = 9.09 \text{ seg}$

26. Si el tiempo total en que deja de botar una pelota es de $t_{total} = 7.0 \text{ seg}$ y fue dejada caer desde una altura de $h_0 = 10.0 \text{ m}$, calcule el coeficiente de restitución entre la pelota y el piso. Sol. $e = 0.661$

27. Si el tiempo total en que deja de botar una pelota es de $t_{total} = 10.0 \text{ seg}$ y el coeficiente de restitución entre la pelota y el piso es $e = 0.4$, calcule la altura desde la cual se soltó la pelota.

Sol. $h_0 = 360.0 \text{ m}$.

28. Un camión de $m_1 = 8\,000 \text{ kg}$ de masa que viaja a una velocidad de $v_{01} = 15 \frac{m}{s}$ hacia el este, choca contra un automóvil de $m_2 = 2\,000 \text{ kg}$ de masa que se mueve con una velocidad de $v_{02} = 30 \frac{m}{s}$ siguiendo una dirección de $\theta_{02} = 40^\circ$ suroeste. Después de la colisión los dos vehículos quedan unidos. ¿Con qué velocidad y en qué dirección se moverán los vehículos después del impacto?

Sol. $\theta = -27.52^\circ$, dirección sureste y $v = 8.35 \frac{m}{s}$

29. Una bola de $m_1 = 1.2 \text{ kg}$ de masa que viaja a una velocidad de $v_{01} = 0.5 \frac{m}{s}$ hacia el este, choca contra otra bola de $m_2 = 0.4 \text{ kg}$ de masa que se mueve con una velocidad de $v_{02} = 0.8 \frac{m}{s}$ hacia el oeste. Después de la colisión la primera bola se mueve con una velocidad de $v_1 = 0.3 \frac{m}{s}$ con una dirección de $\theta_1 = 40^\circ$ sureste. ¿Cuál es la velocidad y dirección final de la segunda bola?

Sol. $\theta = 88.95^\circ$ y $v = 8.35 \frac{m}{s}$

30. Una esfera perfectamente elástica con una masa de $m_1 = 20.0 \text{ kg}$ moviéndose con una velocidad de $v_{01} = 12.0 \frac{m}{s}$ colisiona con otra esfera perfectamente elástica de una masa de $m_2 = 15.0 \text{ kg}$, inicialmente en reposo. Después de la colisión la primera esfera se desplaza a una velocidad de $v_1 = 8.0 \frac{m}{s}$. Hallar la dirección de m_1 , y la velocidad y dirección de m_2 .

Sol. $\theta_1 = 39.57^\circ$, $\theta_2 = 41.14^\circ$ y $v_2 = 10.33 \frac{m}{s}$

6 BIBLIOGRAFÍA

- Alonso, M. y Finn, E. J. (1976) *Física, Vol. I: Mecánica*. México, D.F.: Fondo Educativo Interamericano, S. A.
- Beltrán V. y Braun E. (1975) *Principios de Física*. México, D. F.: Trillas.
- Bueche, F. J. (1990) *Física General*. México, D. F.: McGraw-Hill.
- Bueche, F. J. (1987) *Física para Estudiantes de Ciencias e Ingeniería. Tomo I*. México, D. F.: McGraw-Hill.
- Hewitt, P. (1995) *Física Conceptual*. México, D.F.: Addison-Wesley Iberoamericana.
- Resnick, R. y Halliday, D. (1980) *Física. Vol. I*. México, D.F.: CECSA.
- Sears, F. W., Zemanzky, M. y Young, H. D. (1988) *Física Universitaria*. México, D.F.: Addison-Wesley Iberoamericana.
- Serway, R.A. (1985) *Física*. México, D.F.: Interamericana.
- Tipler, P. A. (1995) *Física*. México, D.F.: Reverté.
- Tippens, P. E. (1978) *Física, Conceptos y Aplicaciones*. México, D.F.: McGraw-Hill.
- White, H. E. (2013) *Física Moderna*. México, D.F.: McGraw-Hill.
- Wooton, W., Beckenbach, E. y Fleming F. (1978) *Geometría Analítica Moderna*. México, D.F.: Publicaciones Cultural.