



Un Sistema Que Simula Colisiones En Dos Dimensiones Entre Dos Cuerpos

Guillermo Becerra Córdova

Universidad Autónoma Chapingo

Dpto. de Preparatoria Agrícola

Área de Física

e-mail: gbecerrac@chapingo.mx

Resumen

En los cursos de Mecánica se estudia la Cantidad de Movimiento y su conservación. Dentro de este tema se encuentran las colisiones en dos dimensiones y el concepto de coeficiente de restitución. En el presente trabajo se muestra el uso de un sistema que simula colisiones en dos dimensiones entre dos cuerpos. Las simulaciones consisten en mostrar cómo dos cuerpos chocan dadas sus masas, las velocidades con las que se moverán y el coeficiente de restitución entre ambos cuerpos. Para ello se introduce, a través de barras de desplazamiento, las masas de los cuerpos y la velocidad o la dirección final con la que se va a mover uno de los dos cuerpos. Las simulaciones tratan de mostrar cómo las masas y la velocidad o la dirección final de uno de los cuerpos influyen en el resultado de la colisión. No es lo mismo una colisión cuando las masas de los cuerpos son iguales que cuando son diferentes. De igual forma, influye la velocidad o la dirección final con la que se moverá uno de los cuerpos después de la colisión. El coeficiente de restitución también juega un papel importante. Si el coeficiente es igual a uno, la colisión sería perfectamente elástica y, en consecuencia, no habría pérdida de energía en la colisión. Si el coeficiente fuese igual a cero, correspondería a una colisión perfectamente inelástica, provocando que los cuerpos se mantengan unidos después de la colisión. Estas simulaciones sólo tratan de colisiones perfectamente elásticas. De esta forma, el sistema puede simular diversos tipos de situaciones al variar las masas y la velocidad o dirección final de uno de los cuerpos. Este trabajo no considera colisiones perfectamente inelásticas. Finalmente, las simulaciones hacen posible que el usuario pueda observar cada una de estas situaciones, creando con ello un lenguaje visual.

Palabras Clave: cantidad de movimiento, colisiones en dos dimensiones, coeficiente de restitución.

Abstract

In Mechanics courses, the Quantity of Movement and its conservation are studied. Within this topic are collisions in two dimensions and the concept of coefficient of restitution. In the present work the use of a system that simulates collisions in two dimensions between two bodies is shown. The simulations consist of showing how two bodies collide given their masses, the speeds with which they will move and the coefficient of restitution between both bodies. To do this, the masses of the bodies and the speed or the final direction with which one of the two bodies is going to move is entered through scroll bars. The simulations try to show how the masses and the final speed or direction of one of the bodies influence the outcome of the collision. A collision is not the same when the masses of the bodies are the same as when they are different. In the same way, the speed or the final direction with which one of the bodies will move after the collision influences. The coefficient of restitution also plays an important role. If the coefficient is equal to one, the collision would be perfectly elastic and, consequently, there would be no loss of energy in the collision. If the coefficient were equal to zero, it would correspond to a perfectly inelastic collision, causing the bodies to stick together after the collision. These simulations only deal with perfectly elastic collisions. In this way, the system can simulate various types of situations by varying the masses and the final speed or direction of one of the bodies. This work does not consider perfectly inelastic collisions. Finally, the simulations make it possible for the user to observe each of these situations, thereby creating a visual language.

Keywords: amount of movement, collisions in two dimensions, coefficient of restitution.

Introducción:

Para choques en dos dimensiones es importante la naturaleza vectorial de la conservación de la cantidad de movimiento o momento lineal. En particular, para colisiones en dos dimensiones, las colisiones totalmente inelásticas no presentan mucha dificultad. La cantidad de movimiento inicial total se obtiene sumando vectorialmente las cantidades de movimiento inicial de cada cuerpo. Por ser una colisión en dos dimensiones perfectamente inelástica, los cuerpos quedan unidos después de la colisión. En este caso el coeficiente de restitución es igual a cero y, por quedar unidos los cuerpos, la rapidez y la dirección con la que se desplazarían sería la misma. Este tipo de colisiones son muy comunes en las colisiones entre autos. En muchas de estas colisiones los autos quedan unidos, por lo que se puede conocer la velocidad de cada uno de ellos antes de la colisión, suponiendo que los coches se movían perpendicularmente.

Las colisiones en dos dimensiones, que no son perfectamente inelásticas, son más complicadas de describir, ya que se necesitan conocer las rapidez y las direcciones de los dos cuerpos después de la colisión. Es decir, se tienen cuatro incógnitas, pero sólo se tienen tres ecuaciones, por lo que se requiere establecer otra ecuación para que se puedan resolver este tipo de situaciones. Esta cuarta relación depende del parámetro de impacto b y del tipo de interacción entre las partículas. El parámetro de impacto se mide en función de la distancia entre los centros de los cuerpos. Si el parámetro de impacto es igual a cero, se considera una colisión en una dimensión. Si el parámetro de impacto es diferente de cero, entonces los cuerpos se moverán en diferentes velocidades y direcciones dependiendo de las cantidades iniciales de movimiento de los cuerpos.

Cuando no se conoce el parámetro de impacto, la información adicional se puede obtener de los experimentos. Lo más sencillo es especificar el ángulo de desviación de una de las partículas que chocan. Consideremos lo que sucede cuando una partícula se proyecta sobre una partícula blanca que está en reposo. Mucho trabajo experimental está relacionado con la física nuclear al proyectar partículas nucleares sobre blancos que se encuentran en reposo. Debido a la conservación de la cantidad de movimiento, el movimiento en tales colisiones ocurre en un plano. La fuerza de la interacción puede ser de origen electromagnético, gravitacional o nuclear. Las partículas no necesariamente se deben tocar, por lo que son desviadas por fuerzas que actúan en corto tiempo comparado con el tiempo de la observación, cuando las distancias de acercamiento son relativamente pequeñas.

Justificación:

En la enseñanza de la Física, generalmente se manejan ideas abstractas o intangibles que no son apreciadas fácilmente por nuestros sentidos, careciendo de significado al no ser representadas. Es por ello que las representaciones juegan un papel importante, ya que permiten trasladar ideas en imágenes que pueden ser apreciadas por nuestros sentidos. Con esto se intenta dar significado a una cuestión abstracta. En la etapa formativa de los alumnos, es importante que el acercamiento a las representaciones visuales apoye los conceptos de la física, de tal forma que la imagen conceptual que se genere en ellos presente menos obstáculos. Para generar representaciones visuales de los conceptos que se manejan en la Física, es conveniente presentar experimentos que muestren las ideas fundamentales que se establecen en dichos conceptos. En muchas ocasiones el experimento es utilizado como herramienta de comprobación. Por ello, es deseable que cada tema que es analizado, vaya acompañado de un diseño experimental. Sin embargo, en muchas ocasiones, este objetivo no es logrado cabalmente por diversas razones, entre ellas tenemos:

- En algunos temas es difícil implementar un experimento demostrativo ya que es prácticamente imposible aislar al sistema de la influencia del medio.
- La falta de equipo.
- La carencia de profesores con elementos académicos para implementar experiencias de laboratorio.

Por tal motivo, nuestro interés se centra en el uso de la computadora, para crear percepciones visuales y ser un elemento básico para reforzar los conceptos de la física.

Objetivo:

Con este trabajo mostrar un sistema que simule colisiones en dos dimensiones entre dos cuerpos para que el usuario observe cómo influyen los parámetros rigen las simulaciones.

Teoría:

El producto de la masa que tiene un cuerpo por la velocidad con la que se mueve, se le conoce como cantidad de movimiento o ímpetu. Matemáticamente se tiene (Bueche, 2015, 74):

$$p = m v \quad 1$$

Donde p es la cantidad de movimiento, m es la masa del cuerpo y v es la velocidad con la que se mueve el cuerpo. La cantidad de movimiento es una magnitud vectorial porque es el producto de una magnitud escalar (la masa) por una cantidad vectorial (la velocidad). En consecuencia, para que la cantidad de movimiento sea completamente especificada debe ser representada por su magnitud y su dirección. Esta expresión nos indica que mientras más grande sea la masa y/o la velocidad de un objeto, su cantidad de movimiento es mayor. O si la masa y la velocidad del cuerpo es pequeña, entonces su cantidad de movimiento también debe ser pequeño. Es por eso por lo que un objeto con masa muy grande como un camión, es muy difícil de detener a pesar de que tenga una velocidad relativamente pequeña. La unidad del momento lineal en el Sistema Internacional es kilogramo por metro entre segundo. La dirección de la cantidad de movimiento de un cuerpo coincide con la dirección de la velocidad del cuerpo. Debido a que la masa siempre es positiva, no cambia la dirección de la cantidad de movimiento y de la velocidad del cuerpo; ambas direcciones son iguales.

Una fuerza F que actúa durante un tiempo t sobre un cuerpo le proporciona un impulso, dado por (Resnick, 2002, 198):

$$I = F t \quad 2$$

la unidad del Impulso en el Sistema Internacional es Newton por segundo.

Cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo se produce un cambio en la cantidad de movimiento. Así, el impulso aplicado a un cuerpo es igual al cambio de la cantidad de movimiento, es decir (Serway, 2014, 120):

$$I = F t = \Delta p \quad 3$$

Donde Δp es el cambio en la cantidad de movimiento, F es la fuerza que se aplica al cuerpo, t es el tiempo en el cual se aplica la fuerza e I es el impulso. El cambio en la cantidad de movimiento puede ocurrir debido al cambio de la masa, de la velocidad o de ambas. Si la masa permanece constante, entonces debe ocurrir un cambio de velocidad si la cantidad de movimiento cambia. Si el cambio en la cantidad de movimiento es constante, entonces para un determinado intervalo de tiempo, el producto de la fuerza por el tiempo también sería constante. Esto es un caso particular en el cual la fuerza aplicada es constante. En general, la fuerza puede variar y, en ese caso, el cambio en la cantidad de movimiento no sería constante. De esta forma, el impulso depende del producto de la fuerza que se le aplique a un cuerpo multiplicado por el tiempo en que se aplique. El impulso será más grande si aplicamos la misma fuerza durante un tiempo más prolongado. O el impulso será más pequeño si aplicamos la misma fuerza en un tiempo muy corto. Tanto la fuerza

como el tiempo son importantes para cambiar el impulso de un cuerpo. Se puede tener el mismo impulso aplicando una fuerza grande en un tiempo muy pequeño o aplicando una fuerza pequeña en un tiempo muy grande. Cuando la fuerza es muy grande, como el golpe de un martillo, un bastón de golf, un bate, etc., se ha observado que el cuerpo puede llegar a deformarse, ya sea permanente o temporalmente. En el caso en que la fuerza sea muy pequeña, el tiempo en que se aplique debe ser muy grande para producir el mismo impulso. Así, si queremos detener el movimiento de un objeto sería conveniente utilizar una fuerza muy pequeña en un tiempo muy grande, ya que, al utilizar una fuerza muy grande en un tiempo muy pequeño, se tendría la posibilidad de que el cuerpo se deforme o nos duela más el golpe que experimentamos si tratamos de detenerlo con alguna parte de nuestro cuerpo. Esto puede suceder cuando un automóvil choca con un muro, un árbol o cualquier obstáculo que sea sólido. Las consecuencias pueden ser fatales cuando la fuerza que se aplica es grande en un tiempo muy corto. En cambio, si utilizamos arena, paja o cualquier material que haga que la fuerza que se aplique sea pequeña en un tiempo relativamente largo, hará que el objeto se detenga con poca posibilidad de que se deforme, incluso permanentemente como sucede con los automóviles. Por eso es conveniente que los autos se fabriquen con material que pueda ser fácilmente deformable para que la fuerza con la que llegue a chocar un auto contra un material sólido se disminuya en un tiempo más grande en comparación con la fuerza que se aplica cuando el auto no tiene material fácilmente deformable. Mucha gente cuestionaba los autos que eran contruidos con partes que no fueran de metal, pero después se dieron cuenta que convenía más ya que en un accidente el impacto se amortiguaba más porque sus piezas no eran tan sólidas. El problema ahora es que la deformación que sufren los autos hace que la gente quede atrapada dentro de ellos. Pero eso es otro problema. Lo mismo sucede cuando caemos en un piso sólido después de haber saltado desde una determinada altura. Lo más conveniente es flexionar las piernas para que la fuerza con que caigamos sea en un tiempo más prolongado, evitando así que la fuerza sea grande.

En conclusión, se pueden tener iguales impulsos, pero en algunas ocasiones la fuerza con la que se aplica el impulso debe ser grande, ocasionando que el tiempo en que se aplique la fuerza sea muy corto. Mientras más corto sea el tiempo en el que se aplique la fuerza, mayor será la fuerza que se aplique, para un impulso dado. Los golpes que se dan ya sean con martillos o con cualquier tipo de instrumentos, harán que se aplique una fuerza muy grande en un tiempo relativamente corto. Por eso tenemos que evitar que nos pegue el martillo a la hora que estamos clavando. Para evitar un poco ese efecto, es recomendable que se usen guantes para aumentar el tiempo en que nos golpee el martillo. En otras ocasiones es recomendable que el tiempo que tarda en actuar una fuerza sea relativamente grande, para evitar que nos afecte. Esto se podría aplicar a los casos en que atrapamos una pelota dura, como una pelota de béisbol o algo similar. Para aumentar el tiempo que tarde la fuerza en actuar, se debe mover la mano en dirección del movimiento de la pelota. Lo mismo sucede si queremos evitar que nos afecte el golpe producido por un objeto. Es conveniente movernos en la dirección en la que se mueve el objeto para prolongar el tiempo que tarda en actuar la fuerza (Hewitt, 2007, 98).

De la ecuación 2 concluimos que el impulso produce un cambio en cantidad de movimiento, es decir (Resnick, 2002, 199):

$$I = F t = \Delta p = m (v - v_0) \quad 4$$

Cuando un cuerpo experimenta un impulso, la ecuación 4 afirma que ha actuado una fuerza sobre el cuerpo para que pueda cambiar su cantidad de movimiento. Una fuerza es consecuencia de la interacción con otros cuerpos. Así, por la tercera ley de Newton, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo también las experimentan los cuerpos que las provocan. La cantidad de movimiento de un sistema de cuerpos en los que no existe una fuerza externa que influya, se mantiene constante. De

esta forma, el cambio en la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual al cambio en la cantidad de movimiento del resto de los cuerpos que componen el sistema, siempre y cuando el sistema no reciba influencia de fuerzas externas. Cuando un sistema se encuentra aislado, la cantidad de movimiento se mantiene constante porque no hay fuerzas externas. En el caso en que el sistema estuviera influido por una fuerza, su cantidad de movimiento cambiaría. En consecuencia, podemos afirmar que (Beltrán, 1990, 80):

“Si sobre un sistema no se ejerce fuerza neta, la cantidad de movimiento no cambia”

De esta forma, la cantidad de movimiento de los cuerpos que interactúan en un sistema aislado permanece constante. Esto nos indica que la cantidad de movimiento de cada una de las partículas que constituyen un sistema aislado puede cambiar, pero la suma de la cantidad de movimiento de todas las partículas permanece constante. Así, la cantidad de movimiento que posee un sistema de cuerpos o partículas antes de su interacción es igual a la cantidad de movimiento después de su interacción. Cuando la cantidad de movimiento no cambia, decimos que se conserva. Por lo que la cantidad de movimiento de un sistema se conserva cuando sobre el sistema no actúan fuerzas. A este hecho se le conoce como ley de conservación de la cantidad de movimiento. Como consecuencia de esto podemos afirmar que, en la colisión entre partículas o cuerpos, en la desintegración radiactiva o en una explosión, la cantidad de movimiento se mantiene constante, siempre y cuando no haya fuerzas externas.

Para dos cuerpos que interactúan, el cambio en la cantidad de movimiento de uno de ellos es igual a menos el cambio de la cantidad de movimiento del otro cuerpo. Matemáticamente se tiene:

$$\Delta p_1 = -\Delta p_2 \quad 5$$

Sustituyendo en la definición de cantidad de movimiento, se obtiene:

$$m_1 v_1 - m v_{0_1} = -(m_2 v_2 - m v_{0_2}) \quad 6$$

Reordenando términos:

$$m v_{0_1} + m v_{0_2} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad 7$$

Esta expresión nos indica que la suma de la cantidad de movimiento de ambos cuerpos permanece constante, si no hay fuerzas externas que influyan en ellos. Este resultado se aplica a cualquier número de cuerpos (Tipler, 2010, 150).

Si consideramos la caída de un cuerpo, el cuerpo en sí mismo no estaría aislado y, en consecuencia, su cantidad de movimiento cambiaría. Cambiaría porque estaría expuesto a una fuerza externa como el peso. Pero si consideramos como sistema al formado por el cuerpo y la Tierra, la cantidad de movimiento del sistema permanecería constante. El problema es que el cambio en la cantidad de movimiento de la Tierra no se percibe por su gran masa. Pero teóricamente debe cambiar, independientemente de que se perciba o no. Sin embargo, si ponemos a interactuar a dos cuerpos que tengan masas muy similares, el cambio en la cantidad de movimiento se percibiría fácilmente. Por ejemplo, supongamos que una bola de billar choca con una pelota de esponja. Como la masa de la bola de billar es muy grande en comparación de la masa de la pelota de esponja, después del choque la bola de billar casi mantendría su movimiento en la misma dirección con la que se movía antes del choque. En cambio, la pelota de esponja comenzaría a moverse en la misma dirección con la que se movía la bola de billar. Si ahora la pelota de esponja es la que se mueve y la bola de billar se encuentra en reposo, al chocar la pelota de esponja veremos que rebotaría y que la bola de billar se movería muy poco, en la misma dirección en la que se movía la pelota de esponja antes de la colisión. Si las masas de ambas pelotas son iguales, al impactar una de ellas sobre la otra veríamos que la que se encuentra en reposo se movería con la misma velocidad con la que se movía la bola que impactó y que la bola que impactó se quedaría en reposo después de la colisión. En todos estos casos la cantidad de movimiento de cada uno de los cuerpos cambia, pero la cantidad

de movimiento del sistema permanece constante. Esto es considerando que los cuerpos giran sin fricción porque, si consideramos que influye la fricción, entonces la cantidad de movimiento no se mantendría constante debido a la presencia de una fuerza externa (Hewitt, 2007, 105).

Los ejemplos de colisiones que hemos analizado anteriormente son ejemplos de colisiones que se consideran elásticas porque la deformación que sufren no es permanente y esta deformación no genera una pérdida de energía. En estas condiciones se dice que la colisión es elástica.

Cuando un cuerpo se deforma permanentemente o genera calor en una colisión, se dice que la colisión es inelástica. De igual forma, cuando dos o más objetos en una colisión quedan unidos, decimos que la colisión es inelástica. Es muy común encontrar colisiones inelásticas. Por ejemplo, cuando aventamos un papel mojado hacia el techo o el piso, vemos que se queda pegado. En este caso se dice que la colisión es inelástica. De igual forma sucede cuando dos autos quedan unidos después de un choque. También sucede cuando una persona atrapa una pelota. También son ejemplos de colisiones inelásticas cuando dejamos caer al piso una pelota de esponja. Vemos que rebotaría un número finito de veces hasta que deja de botar. Estas colisiones son inelásticas porque, a pesar de que no se deforma permanentemente la pelota, se generaría calor en cada rebote y esto, teóricamente, aumentaría su temperatura. A pesar de que existan colisiones inelásticas, la cantidad de movimiento se conservaría. Por ejemplo, se ha visto que cuando un cuerpo colisiona con otro que se encuentra en reposo y queda unido después de la colisión, la velocidad del cuerpo que lleva ahora el cuerpo que se movía, es menor ya que se encuentra unido al cuerpo que se encontraba en reposo. Esa unión hace que la velocidad del cuerpo que se movía disminuyera. Al hacer cálculos de la suma de la cantidad de movimiento de los cuerpos antes y después de la colisión, vemos que son iguales. Es decir, la cantidad de movimiento de un sistema en la que existen colisiones inelásticas, también se conserva.

Colisiones en dos dimensiones entre dos cuerpos.

Para cualquier colisión entre dos cuerpos en la que se mueven a lo largo de una línea recta, el coeficiente de restitución e se define como (Bueche, 2015, 75):

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{01} - v_{02}} \quad 8$$

Donde: v_{01} y v_{02} son las velocidades iniciales y v_1 y v_2 son las velocidades finales de los cuerpos. Para encontrar experimentalmente el coeficiente de restitución, se deja caer un cuerpo esférico sobre un cuerpo duro como el metal. Conociendo la altura a la cual se deja caer el objeto y la altura a la que rebota, podemos calcular el coeficiente de restitución por medio de la siguiente ecuación:

$$e = \sqrt{\frac{h}{H}} \quad 9$$

Donde: h es la altura a la que rebota la esfera y H es la altura desde la que se deja caer.

El coeficiente de restitución no puede ser mayor que uno ya que no se ha observado que una esfera no rebota a una altura mayor que la altura a la cual se deja caer.

Colisiones elásticas en dos dimensiones

Para colisiones en dos dimensiones es importante considerar la naturaleza vectorial de la conservación de la cantidad de movimiento o momento lineal. En particular, para colisiones en dos dimensiones, las colisiones totalmente inelásticas no presentan mucha dificultad. La cantidad de

movimiento inicial total se obtiene sumando vectorialmente las cantidades de movimiento inicial de cada cuerpo. Por ser una colisión en dos dimensiones perfectamente inelástica, los cuerpos quedan unidos después de la colisión. En este caso, el coeficiente de restitución es igual a cero y, por quedar unidos los cuerpos, la rapidez y la dirección con la que se desplazarían sería la misma. Este tipo de colisiones son muy comunes en las colisiones entre autos. En muchas de estas colisiones los autos quedan unidos, por lo que se puede conocer la velocidad de cada uno de ellos antes de la colisión, suponiendo que los coches se movían perpendicularmente.

Las colisiones totalmente elásticas en dos dimensiones son más complicadas de describir, ya que se necesitan conocer las rapidez y las direcciones de los dos cuerpos después de la colisión. Es decir, se tienen cuatro incógnitas, pero sólo se tienen tres ecuaciones, por lo que se requiere establecer otra ecuación para que se puedan resolver este tipo de situaciones. Esta cuarta relación depende del parámetro de impacto b y del tipo de interacción entre las partículas. El parámetro de impacto se mide en función de la distancia entre los centros de los cuerpos. Si el parámetro de impacto es igual a cero, se considera una colisión en una dimensión. Si el parámetro de impacto es diferente de cero, entonces los cuerpos se moverán en diferentes velocidades y direcciones dependiendo de las cantidades iniciales de movimiento de los cuerpos.

Cuando no se conoce el parámetro de impacto, la información adicional se puede obtener de los experimentos. Lo más sencillo es especificar el ángulo de desviación de una de las partículas que chocan o la velocidad final de uno de los cuerpos que impactan. Consideremos lo que sucede cuando una partícula se proyecta sobre una partícula blanco que está en reposo. Mucho trabajo experimental está relacionado con la física nuclear al proyectar partículas nucleares sobre blancos que se encuentran en reposo. Debido a la conservación de la cantidad de movimiento, el movimiento en tales colisiones ocurre en un plano. La fuerza de la interacción puede ser de origen electromagnético, gravitacional o nuclear. Las partículas no necesariamente se deben tocar, por lo que son desviadas por fuerzas que actúan en corto tiempo comparado con el tiempo de la observación, cuando las distancias de acercamiento son relativamente pequeñas.

Las colisiones en dos dimensiones, que son perfectamente elásticas, se describen al descomponer la ecuación 7 en sus componentes horizontal y vertical, es decir:

$$m_1 v_{0_1} \cos \theta_{0_1} + m_2 v_{0_2} \cos \theta_{0_2} = m_1 v_1 \cos \theta_1 + m_2 v_2 \cos \theta_2 \quad 10$$

Y

$$m_1 v_{0_1} \sin \theta_{0_1} + m_2 v_{0_2} \sin \theta_{0_2} = m_1 v_1 \sin \theta_1 + m_2 v_2 \sin \theta_2 \quad 11$$

Donde: m_1 y m_2 son las masas de los cuerpos; v_{0_1} y v_{0_2} son las velocidades iniciales; v_1 y v_2 son las velocidades finales; θ_{0_1} y θ_{0_2} son las direcciones iniciales con las que se mueven los cuerpos antes de la colisión y θ_1 y θ_2 son las direcciones finales.

Como se puede observar, dadas las velocidades y direcciones de los cuerpos antes de la colisión, se necesitan conocer las velocidades y direcciones de los cuerpos después de la misma, las cuales corresponden con cuatro variables; dos de las velocidades y dos de las direcciones. El problema es

que sólo se tienen dos ecuaciones. Si consideramos que es una colisión perfectamente elástica, entonces la energía cinética después de la colisión permanece constante, es decir:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{0_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{0_2}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad 12$$

Con esta ecuación se tienen tres ecuaciones que son necesarias para encontrar los valores de las incógnitas que se buscan. Pero no son suficientes ya que se requiere de otra ecuación o el valor ya sea de alguna de las velocidades o direcciones finales para poder encontrar los valores de las restantes variables.

Para simplificar más el conjunto de ecuaciones consideremos que el cuerpo de masa m_2 se encuentra en reposo y que el cuerpo de masa m_1 se mueve en dirección paralela al eje horizontal, es decir, $\theta_{0_1} = 0$. En consecuencia, las ecuaciones 10, 11 y 12 se transforman en:

$$m_1 v_{0_1} = m_1 v_1 \cos \theta_1 + m_2 v_2 \cos \theta_2 \quad 13$$

$$0 = m_1 v_1 \sin \theta_1 + m_2 v_2 \sin \theta_2 \quad 14$$

Y

$$m_2 v_2^2 = m_1 v_{0_1}^2 - m_1 v_1^2 \quad 15$$

Si consideramos la dirección final θ_2 del cuerpo de masa m_2 , entonces:

$$\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2 = 1$$

En consecuencia:

$$\sin \theta_2 = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_2} \quad 16$$

Y sustituyendo la ecuación 16 en la ecuación 14, se tiene:

$$m_1 v_1 \sin \theta_1 + m_2 v_2 \sqrt{1 - \cos^2 \theta_2} = 0 \quad 17$$

Despejando $\cos \theta_2$, tenemos:

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \frac{m_1^2 v_1^2 \sin^2 \theta_1}{m_2^2 v_2^2}} \quad 18$$

Sustituyendo la ecuación 18 en la ecuación 13, se tiene:

$$m_1 v_{0_1} = m_1 v_1 \cos \theta_1 + m_2 v_2 \sqrt{1 - \frac{m_1^2 v_1^2 \sin^2 \theta_1}{m_2^2 v_2^2}} \quad 19$$

Es decir:

$$1 - \frac{m_1^2 v_1^2 \sin^2 \theta_1}{m_2^2 v_2^2} = \left(\frac{m_1 v_{01} - m_1 v_1 \cos \theta_1}{m_2 v_2} \right)^2$$

Desarrollando, se llega a:

$$m_1^2 v_{01}^2 - 2 m_1^2 v_{01} v_1 \cos \theta_1 + m_1^2 v_1^2 - m_2^2 v_2^2 = 0 \quad 20$$

De la ecuación 15, se tiene:

$$m_2^2 v_2^2 = m_1 m_2 (v_{01}^2 - v_1^2) \quad 21$$

Y sustituyendo la ecuación 21 en la ecuación 20, tenemos:

$$m_1^2 v_{01}^2 - 2 m_1^2 v_{01} v_1 \cos \theta_1 + m_1^2 v_1^2 - m_1 m_2 (v_{01}^2 - v_1^2) = 0$$

En consecuencia:

$$\cos \theta_1 = \frac{m_1^2 v_{01}^2 + m_1^2 v_1^2 - m_1 m_2 (v_{01}^2 - v_1^2)}{2 m_1^2 v_{01} v_1} \quad 22$$

Con esta ecuación se puede calcular la dirección con la que se moverá el cuerpo de masa m_1 , conociendo la velocidad inicial y final, al igual que la masa m_2 del otro cuerpo. En consecuencia, para conocer los valores de v_2 y θ_2 , es necesario conocer alguno de los valores de v_1 o θ_1 . Para el caso de la ecuación 22 se ha supuesto que se conoce el valor de v_1 .

Para el caso en que ambas masas sean iguales, la dirección con la que se moverá el cuerpo de masa m_1 es igual a:

$$\cos \theta_1 = \frac{v_1}{v_{01}} \quad 23$$

De manera equivalente, si conocemos la dirección final θ_1 con la que se moverá el cuerpo de masa m_1 después de la colisión, entonces es posible calcular la velocidad v_1 con la que se moverá. Para ello, coloquemos todos los términos que contienen la velocidad final del cuerpo de masa m_1 a la izquierda en ecuación 21, es decir:

$$v_1^2 (m_1 + m_2) - 2 m_1 v_{01} v_1 \cos \theta_1 + v_{01}^2 (m_1 - m_2) = 0 \quad 24$$

La ecuación anterior corresponde con una ecuación de segundo grado para v_1 , cuya solución es:

$$v_1 = \frac{2 m_1 v_{01} \cos \theta_1 + \sqrt{4 m_1^2 v_{01}^2 \cos^2 \theta_1 - 4 v_{01}^2 (m_1^2 - m_2^2)}}{2 (m_1 + m_2)} \quad 25$$

Se toma el signo positivo de la raíz debido a que, en el caso en que las masas sean iguales, la velocidad con la que se movería el cuerpo de masa m_1 después de la colisión, sería igual a cero. Esto correspondería con un choque frontal, el cual corresponde con colisiones en una dimensión.

Para el caso en que las masas sean iguales, la velocidad final de m_1 es igual a:

$$v_1 = v_{0_1} \cos \theta_1 \quad 26$$

Para calcular la velocidad con la que se moverá el cuerpo de masa m_2 , se hace uso de la ecuación 15:

$$v_2 = \sqrt{\frac{m_1 v_{0_1}^2 - m_1 v_1^2}{m_2}} \quad 27$$

Una vez conocidas las velocidades v_1 , v_2 y la dirección θ_1 podemos calcular la dirección del cuerpo de masa m_2 haciendo uso de la ecuación 14:

$$\theta_2 = \text{Arc Sen} \left(\frac{-m_1 v_1 \text{Sen } \theta_1}{m_2 v_2} \right) \quad 28$$

Resultados y discusión:

En esta sección describiremos la forma en que se utiliza el sistema. En la figura 1 se muestra la ventana principal del sistema que se elaboró como resultado del proyecto. En esta ventana se muestran dos botones de comando. Uno de ellos sirve para **Continuar** con el sistema y el otro sirve para **Salir**.

Ventana principal del sistema.

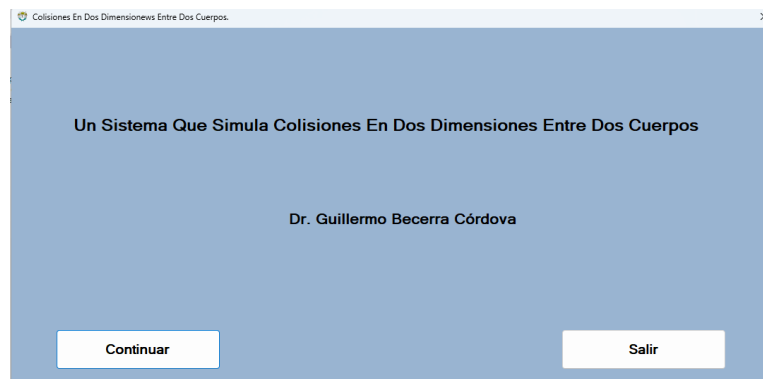


Figura 1. Fuente propia.

Al escoger la opción Continuar aparecerá otra ventana como la mostrada en la figura 2. En esta ventana se muestran 4 barras de desplazamiento. Las dos primeras se utilizan para asignar los valores de las masas los cuerpos, las siguientes corresponde con la velocidad o la dirección final del cuerpo de color amarillo. Este dato es necesario para poder conocer la velocidad final y la dirección final del cuerpo de color verde. Estos datos son necesarios para poder llevar a cabo la simulación. Si el usuario escoge la velocidad final del cuerpo amarillo, entonces el sistema

calculará la su dirección final. De forma equivalente, si el usuario escoge la dirección final, el sistema calculará la velocidad final del cuerpo amarillo. En principio el sistema asigna valores a las masas de os cuerpos y a la velocidad inicial del cuerpo amarillo. De igual forma, asigna un valor a la velocidad final o a la dirección final del cuerpo amarillo. Con las barras de desplazamiento se pueden cambiar estos valores. Se debe aclarar que no siempre se puede llevar a cabo una simulación porque físicamente no es posible o matemáticamente las ecuaciones que calculan las velocidades o direcciones finales del cuerpo amarillo no se pueden calcular. En estos casos se deben cambiar esos valores para que se realice una simulación. La figura siguiente muestra esta situación.

Ventana correspondiente con la simulación.

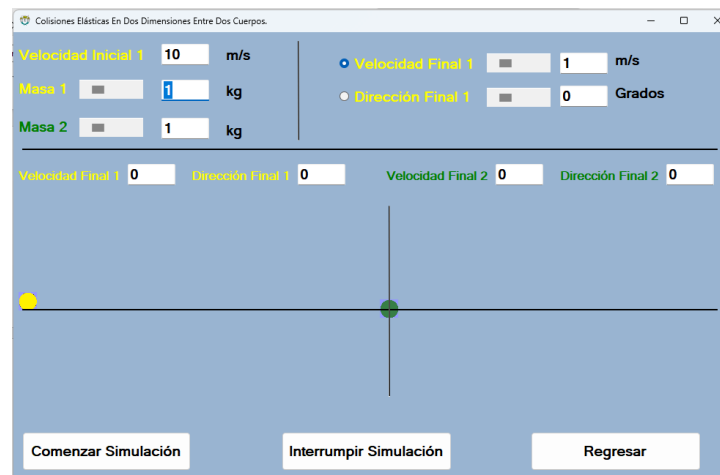


Figura 2. Fuente propia.

Si activamos la simulación, el usuario observará que el cuerpo amarillo se moverá hacia el cuerpo que se encuentra en reposo. Después de la colisión, el cuerpo de color amarillo se moverá con una velocidad de 1.0 m/s y un ángulo de 84.26° con respecto de la horizontal y el cuerpo de de color verde se moverá con una velocidad de 9.95 m/s, formando un ángulo de -5.74° con respecto de la horizontal. El signo negativo significa que el cuerpo se dirige hacia abajo. La figura 3 muestra el resultado de la simulación.

Ventana correspondiente con la simulación.

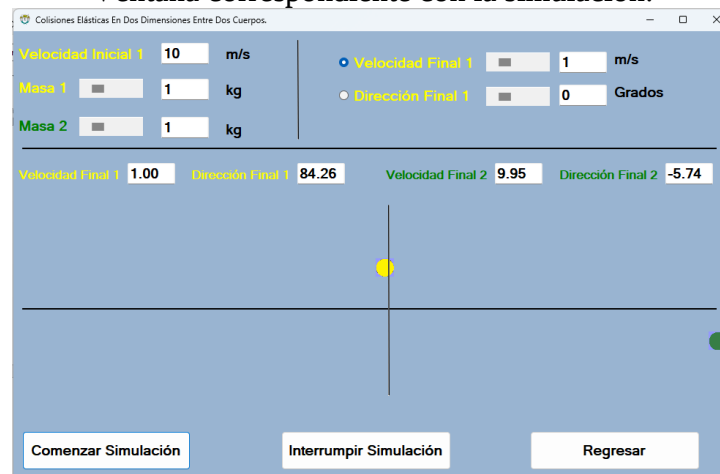


Figura 3. Fuente propia.

Si ahora modificamos el valor de la velocidad final del cuerpo amarillo a un valor de 5 m/s con los mismos valores de las masas, observaremos que la dirección final del cuerpo amarillo y velocidad y dirección final del cuerpo verde serán iguales a 60° , 8.66 m/s y -30° , respectivamente. La figura 4 muestra esta situación.

Ventana correspondiente con la simulación.

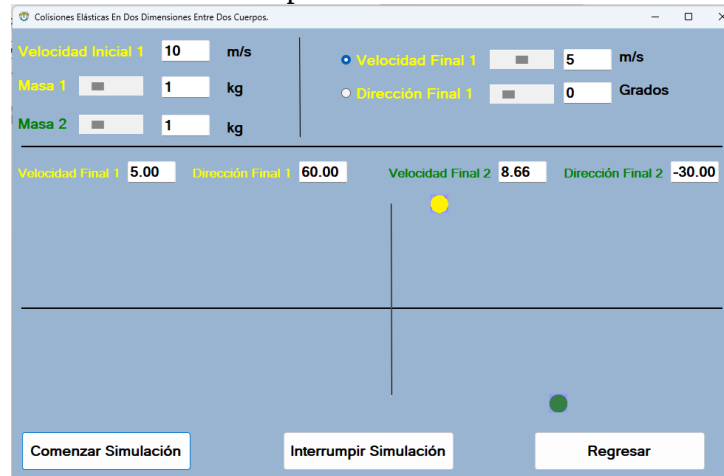


Figura 4. Fuente propia.

Observe en la figura 4 que las direcciones con la que se mueven ambos cuerpos después de la colisión forman un ángulo de 90° . Esto se va a cumplir siempre que ambas masas sean iguales. Como siguiente ejemplo supongamos ahora que se proporciona la dirección final del cuerpo amarillo y que se quiere conocer su velocidad final y la velocidad y dirección final del cuerpo verde. Si le asignamos un valor de 30° a la dirección final del cuerpo amarillo y marcamos en la opción respectiva, observaremos que la velocidad final del cuerpo amarillo es de 8.66 m/s y la velocidad y dirección final del cuerpo verde es de 5 m/s y de -60° , respectivamente. La figura 5 muestra esta situación.

Ventana correspondiente con la simulación.

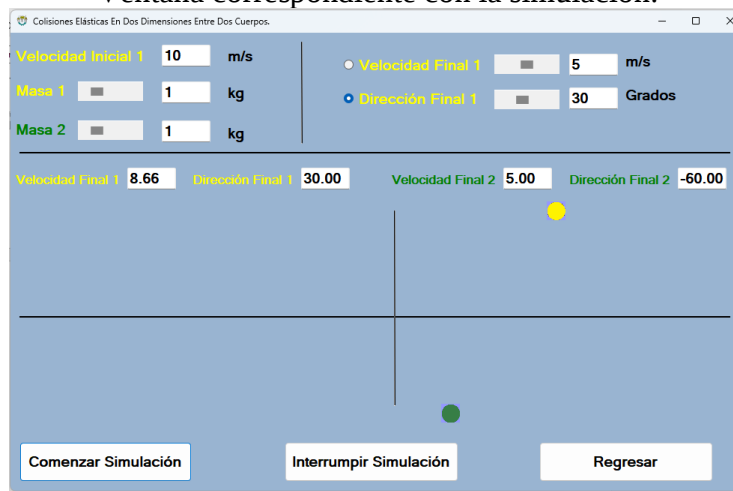


Figura 5. Fuente propia.

Observe en la figura que el ángulo que forman las direcciones de los movimientos de los cuerpos es de 90° .

Como siguiente ejemplo, supongamos que cambiamos el valor de la masa del cuerpo amarillo y dejamos con el mismo valor su dirección final. La siguiente figura muestra el resultado de la

simulación.

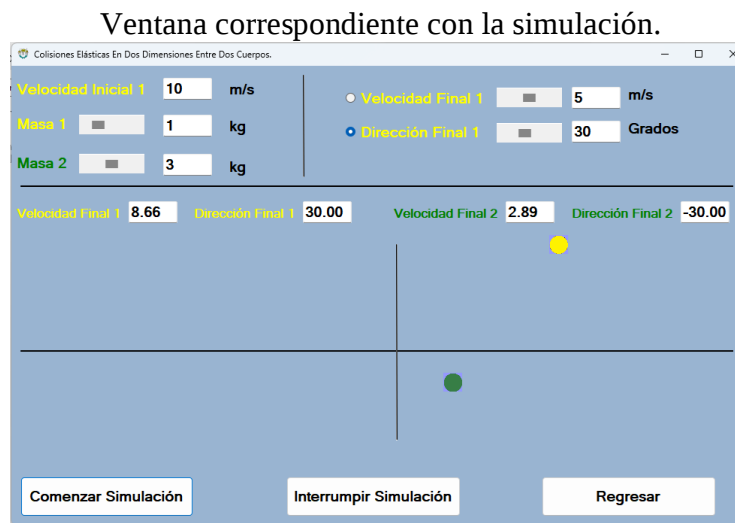


Figura 6. Fuente propia.

Observe en la figura que las direcciones de los movimientos de los dos cuerpos no forman un ángulo de 90° . Esto es consecuencia de que sus masas no son iguales.

Conclusiones:

- El sistema sólo muestra simulaciones de colisiones en dos dimensiones en las cuales uno de los cuerpos se encuentra en reposo antes de la colisión. No es posible mostrar simulaciones en dos dimensiones en los cuales los dos cuerpos se muevan simultáneamente antes de la colisión. Se requiere de más información.
- Para que se lleve a cabo una simulación de colisiones en dos dimensiones entre dos cuerpos, es necesario que uno de los cuerpos se encuentre en reposo y que se dé como dato la velocidad o dirección final del cuerpo que colisiona con el que esté en reposo. Si no se tienen estos datos, no se llevará a cabo una simulación.
- Con los valores de las masas, de la velocidad inicial de uno de los cuerpos y su respectiva velocidad o su dirección final, se pueden llevar a cabo diversas simulaciones. Con esto el usuario podrá apreciar cómo influyen estos valores en el comportamiento de una simulación.
- Aunque son muchas las combinaciones que se pueden realizar con los valores de las masas, la velocidad inicial y la velocidad o la dirección final de uno de los cuerpos, no todas las simulaciones se pueden llevar a cabo debido a que física o matemáticamente no es posible.
- Con el sistema se podrá observar que el ángulo que forman las direcciones con la que se mueven los cuerpos después de la colisión es de 90° , siempre y cuando sus masas sean iguales. En este caso se puede observar en la respectiva simulación que la suma de los valores absolutos de las direcciones finales de ambos cuerpos es igual a 90° . También podrá observar que, si las masas de los cuerpos son diferentes, las direcciones con las que se desplazarán los cuerpos después de la colisión no formarán 90° .

Referencias:

- Beltrán V. y Braun E. (2020) *Principios de Física*. México, D. F.: Trillas.
- Bueche, F. J. (2018) *Física General*. México, D. F.: McGRAW-HILL.
- Ceballos F. J. (2017) *Enciclopedia de Visual Basic 4*. México, D. F.: Alfaomega Grupo Editor.
- Hewitt, P. (2010) *Física Conceptual*. México, D.F.: Addison-Wesley Iberoamericana.
- Resnick, R. y Halliday, D. (2015) *Física. Vol. I*. México, D.F.: CECSA.

- Serway, R.A. (2014) *Física*. México, D.F.: Interamericana.
- Tipler, P. A. (2018) *Física*. México, D.F.: Reverté.