

Universidad Autónoma Chapingo

Preparatoria Agrícola

Área de Matemáticas

Academia de Matemáticas I y II

Definición

Un **número racional** es un número que se expresa como el cociente $\frac{p}{a}$ de dos números enteros, donde p es el numerador y q es el denominador.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Ejemplos de ecuaciones:

- $3x + 2 = 8$
- $2x + 5y = 3z - 5$
- $x^2 - 4 = 0$
- $4x^2 - 2 = 5x + 2$

Ejemplos:

- 38 es divisible por 2 (termina en 8).
- 145 no es divisible por 2 (termina en 5).

Cómo eliminar símbolos de agrupación

Antes de aplicar la jerarquía, es fundamental saber eliminar correctamente paréntesis, corchetes y llaves. Observa el signo o factor que los antecede:

- Si va precedido por un signo $+$ (o no tiene signo): se eliminan y los términos interiores conservan su signo.
Ejemplo: $a + (b - c) = a + b - c$
- Si va precedido por un signo $-$: se eliminan y todos los términos interiores cambian de signo.
Ejemplo: $a - (b - c) = a - b + c$
- Si va precedido por un factor (ej. $2(x + y)$): se aplica la propiedad distributiva (multiplicar el factor por cada término interior) y luego se elimina el símbolo.
Ejemplo: $2(x + y) = 2x + 2y$
por -3 , también cae.

Ejemplo

Problema: Resuelve: $5x - \{2x - [4 - (x - 1)]\} = 6$

Explicación

$5x - \{2x - [4 - (x - 1)]\} = 6$
Eliminamos el paréntesis interior:
 $5x - \{2x - [4 - x + 1]\} = 6$
Reducimos dentro del corchete:
 $5x - \{2x - [5 - x]\} = 6$
Eliminamos el corchete:
 $5x - 2x + [5 - x] = 6$

Ejemplos

$-2x$ y $5x$
 $8m$ y $4m$

$-5x^3$ y $3x^4$
 $3a^4y^2$ y $5a^3y^2$

Definición

El **Mínimo Común Múltiplo (mcm)** de dos o más números naturales se define como el número natural más pequeño tal que éste es múltiplo de todos ellos, es decir, es el número más pequeño que puede ser dividido entre cada uno de los números dados. En aplicación, es útil para problemas donde se busca un punto en el que diferentes ciclos o eventos se encuentren.

Material de apoyo

Matemáticas I

Editores y revisores:

Angelito Camacho Calderón
Alfonso Castillo Beltrán
Adrián García Dinorín
Guillermo Pablo García Martínez
Rosalino García Reyes
Jesús Alejandro García Villalpando
Valente Guzmán Morales
Luis Roberto Hernández Chávez

Evelio Hernández Juárez
Alma Rosa Herrera Flores
Aura Carina Márquez Martínez
Oscar Palmeros Rojas
Yesenia Pérez González
Noé Ramírez Negrete
Franco Ariel Ulloa González

Índice general

1	Números Reales	2
1.1	Conjuntos Numéricos	2
1.1.1	Introducción	2
1.1.2	Números naturales	2
1.1.3	Números Enteros	3
1.1.4	Números Racionales	4
1.1.5	Números Irracionales	5
1.1.6	Números reales	6
1.2	Números Naturales	8
1.2.1	Divisibilidad	8
1.2.2	Números primos	10
1.2.3	Números compuestos	11
1.2.4	Método de Euclides (Divisiones Sucesivas)	14
1.2.5	Mínimo Común Múltiplo	15
1.2.6	Máximo Común Divisor	17
1.3	Números Enteros	20
1.3.1	Suma de números enteros	20
1.3.2	Resta de números enteros	21
1.3.3	Multiplicación de números enteros	22
1.3.4	Jerarquía de operaciones	23
1.3.5	Propiedades de los exponentes	24
1.4	Operaciones con Números Racionales	26
1.4.1	Fracciones equivalentes	26
1.4.2	Simplificación de una fracción	27
1.4.3	Suma y Resta en los números racionales $\mathbb{Q}$	28
1.4.4	Multiplicación en los números racionales $\mathbb{Q}$	29
1.4.5	División de Números Racionales	30
1.4.6	Potencias enteras	33
1.4.7	Jerarquía de operaciones	40

1. Números Reales

1.1. Conjuntos Numéricos

1.1.1. Introducción

Desde su aparición en la tierra, el hombre ha tenido la necesidad de estudiar, entender, medir y organizar el mundo que lo rodea. Para realizar esto, inventó una herramienta poderosa llamada números.

A lo largo de tu formación has visto a los números como simples símbolos vacíos y sin sentido, sin embargo, estos representan el "idioma" con el que te enseñaron desde cuántos hermanos y hermanas tienes, cuántos dulces podías comer, cuánto te trajo el "ratón de los dientes", hasta cuál es la velocidad de tu internet, cuánto espacio tiene la memoria de tu celular, etc.

Ya en secundaria aprendiste a hacer operaciones básicas, ahora en este primer curso de preparatoria, descubrirás que no todos los números sirven para lo mismo. Conocerás diferentes conjuntos numéricos, y aprenderás que cada uno se creó para resolver un problema específico que el conjunto anterior no podía solucionar.

1.1.2. Números naturales

Números Naturales

Su característica principal que los define es que nos sirven para contar, y los identificamos de la siguiente forma

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots, n, \dots\}$$

Este conjunto se puede representar sobre una recta, llamada "recta numérica".

Nota: los tres puntos llamados elipsis indican que el patrón continuo indefinidamente.

Números Naturales extendidos

Algunos autores consideran a los naturales extendidos, los cuales se obtienen de unir al conjunto de los números naturales con el cero, es decir

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots, n, \dots\}$$

En este conjunto numérico podemos definir dos operaciones fundamentales que son la SUMA o ADICIÓN (+) y la MULTIPLICACIÓN ($\times$).

1.1. CONJUNTOS NUMÉRICOS

SUMA o ADICIÓN (+)

$$5 + 8 = 13$$

$$9 + 17 = 26$$

MULTIPLICACIÓN ($\times$)

$$5 \cdot 8 = 40$$

$$17 \cdot 9 = 153$$

1.1.3. Números Enteros

Este conjunto numérico surge de la necesidad que encontró el ser humano para representar pérdidas, deudas, temperaturas bajo cero, posiciones bajo el nivel del mar o simplemente el balance nulo.

Números Enteros

Es la unión de los números naturales, el cero y los “opuestos de los naturales”, forma el conjunto de los números enteros, es decir:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Debido a la construcción de este conjunto, se tiene que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (el símbolo $\subset$ dice que $\mathbb{N}$ es subconjunto de $\mathbb{Z}$).

La representación geométrica de este conjunto, sobre la recta numérica, es la siguiente:

En este conjunto numérico se pueden definir tres operaciones fundamentales: SUMA o ADICIÓN (+), RESTA O SUSTRACCIÓN (−) y MULTIPLICACIÓN ($\times$).

Ejemplo

Suma: $(-5) + 2 = -3 \in \mathbb{Z}$.

Resta: $3 - 8 = -5 \in \mathbb{Z}$.

Multipliación ($\times$): $(-4) \times (-2) = 8 \in \mathbb{Z}$.

Las operaciones Suma, Resta y Multipliación son operaciones cerradas.

1.1. CONJUNTOS NUMÉRICOS

Valor absoluto

Definición de valor absoluto

El valor absoluto de un número entero m , denotado $|m|$, se define como:

$$|m| = \begin{cases} m, & \text{si } m \text{ es mayor que cero} \\ -m, & \text{si } m \text{ es menor que cero} \end{cases}$$

Ejemplo

$|5| = 5$ (debido a que cinco es mayor que cero)

$|-3| = -(-3) = 3$ (debido a que menos tres es menor que cero)

1.1.4. Números Racionales

Notamos que los números enteros no son suficientes para responder a preguntas como por ejemplo “¿qué parte de 1 km son 375 m?”, para responder a esta pregunta se debe extender el conjunto de números que incluya a los números racionales.

Definición

Un **número racional** es un número que se expresa como el cociente $\frac{p}{q}$ de dos números enteros, donde p es el numerador y q es el denominador, y viene dado por el conjunto

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Ejemplos de números racionales: $-\frac{12}{1}$, 3, 0, $\frac{5}{127}$.

Del ejemplo de los números racionales presentados notamos que todo número entero también es racional ($-\frac{12}{1} = -12$), esto es, los enteros es un subconjunto de los racionales ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$). Este conjunto numérico es cerrado con respecto a las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, excepto entre cero.

1.1. CONJUNTOS NUMÉRICOS

Ejemplos de operaciones con números racionales

SUMA:

$$1. \frac{2}{3} + \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$$

$$2. 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$3. \frac{2}{5} + \frac{4}{3} = \frac{26}{15}$$

$$4. -\frac{4}{7} + \frac{2}{3} = \frac{2}{21}$$

RESTA:

$$1. \frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

$$2. \frac{3}{5} - \frac{9}{4} = -\frac{33}{20}$$

MULTIPLICACIÓN:

$$1. \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{21}$$

$$2. \frac{11}{2} \cdot \left(-\frac{6}{7}\right) = -\frac{33}{7}$$

$$3. \frac{1}{9} \cdot 5 = \frac{5}{9}$$

DIVISIÓN:

$$1. \frac{2}{7} \div \frac{3}{2} = \frac{4}{21}$$

$$2. -\frac{10}{3} \div \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{4}{3}$$

$$3. 5 \div \frac{2}{3} = \frac{15}{2}$$

Los números racionales tienen parte decimal finita, considerando el ejemplo se tiene que $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{3}{4} = 0.75$, $0/10 = 0$; o parte decimal infinita periódica, $\frac{5}{3} = 1.6666\dots$ y $\frac{127}{33} = 3.848484\dots$

1.1.5. Números Irracionales

Hasta estos momentos conocemos números de la forma $\frac{p}{q}$ donde p y q son números enteros con $q \neq 0$, llamados números racionales.

Ejemplos:

- El número $7 = \frac{7}{1}$ se puede expresar en forma fraccionaria con $p = 7$ y $q = 1$
- El número $2.25 = \frac{9}{4}$ se puede expresar en forma fraccionaria con $p = 9$ y $q = 4$
- El número $12.333333\dots = \frac{37}{3}$ se puede expresar en forma fraccionaria con $p = 37$ y $q = 3$

Pero existen números que no se pueden representar de esta manera. Por ejemplo:

- $\sqrt{2} = 1.414213562\dots$
- $\sqrt{3} = 1.7320508\dots$
- $\pi = 3.141592654\dots$
- $e = 2.718281\dots$

Para estos números **NO** se puede obtener dos números enteros p y q , tal que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, $\pi = \frac{p}{q}$, o $e = \frac{p}{q}$.

Definición

A los números decimales inexactos no periódicos se les llama Números Irracionales. Este conjunto se denota como $\mathbb{I}$.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, e y π son números irracionales y hay infinidad de números irracionales. Si se toma la raíz cuadrada a los números primos, todos ellos son números irracionales, es decir,

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}, \sqrt{17}, \sqrt{19}, \dots$$

1.1. CONJUNTOS NUMÉRICOS

Si multiplicamos algún número entero diferente de cero al número π , también es un número irracional

$$\dots, -2\pi, \quad -\pi, \quad \pi, \quad 2\pi, \quad 3\pi, \quad 4\pi, \quad 5\pi, \quad 6\pi, \quad 7\pi, \dots$$

Nota: Es importante mencionar que para este conjunto no se tiene la cerradura bajo las cuatro operaciones básicas SUMA, RESTA, MULTIPLICACIÓN y DIVISIÓN. Es decir, al aplicar una operación entre dos números irracionales no siempre se obtiene un número irracional.

Ejemplos de no cerradura

Suma: $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin \mathbb{I}$

Multiplicación: $\sqrt{11} \times \sqrt{11} = 11 \notin \mathbb{I}$

1.1.6. Números reales

La característica principal de este conjunto es que reúne a los conjuntos vistos anteriormente, se identifica como:

$$\mathbb{R} = \{\dots, -5, -4.5333, -\pi, -\frac{5}{2}, -\sqrt{3}, -1, -0.25, 0, 1, \frac{5}{3}, 2, \sqrt{5}, 3, \pi, 6, 11, \dots\}$$

Para una mejor comprensión del contenido de este conjunto se utilizan los diagramas de Venn-Euler que como sabemos son figuras cerradas contenidas en un conjunto mayor (Universo) que se representa como un rectángulo y que en nuestro caso corresponde al conjunto de números reales $\mathbb{R}$.

Propiedades de los números reales

1. PROPIEDAD CONMUTATIVA

- a) El orden de los **sumandos** no altera la suma.

$$-2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + (-2)$$

- b) El orden de los **factores** no altera el producto.

$$2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times 2$$

2. PROPIEDAD ASOCIATIVA

- a) La forma de agrupar los **sumandos** no cambia la suma.

$$-2 + \left(\frac{3}{4} + 5\right) = \left(-2 + \frac{3}{4}\right) + 5$$

- b) La forma de agrupar los **factores** no cambia el resultado.

$$\left(-2 \times \frac{3}{4}\right) \times 5 = -2 \times \left(\frac{3}{4} \times 5\right)$$

1.1. CONJUNTOS NUMÉRICOS

3. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

Esta propiedad reúne las dos operaciones fundamentales y establece que: **La multiplicación se puede distribuir sobre la suma sin afectar el resultado.**

$$-2 \times \left(\frac{3}{4} + 5 \right) = \left(-2 \times \frac{3}{4} \right) + (-2 \times 5)$$

4. PROPIEDAD DEL NEUTRO

- a) El elemento neutro para la adición o suma (**neutro aditivo**) es el **número cero** ya que al sumarlo a cualquier número real no lo afecta.

$$5 + 0 = 5$$

- b) El elemento neutro para la multiplicación (**neutro multiplicativo**) es el **número uno**, ya que al multiplicarlo por cualquier número no lo afecta.

$$5 \times 1 = 5$$

5. PROPIEDAD DEL INVERSO

- a) El elemento **inverso aditivo** de un número real es el **mismo número precedido de un signo negativo** y la suma de ambos da como suma el neutro aditivo o cero.

$$5 + (-5) = 0$$

- b) El elemento **inverso multiplicativo** de un número real es el **número uno dividido entre ese número**, y la multiplicación de ambos es el neutro multiplicativo o uno.

$$5 \times \left(\frac{1}{5} \right) = 1$$

1.2. NÚMEROS NATURALES

1.2. Números Naturales

1.2.1. Divisibilidad

Como ya se ha mencionado, en el conjunto de los números naturales, la división no está bien definida, sin embargo existe una operación equivalente, la cual se llama divisibilidad.

Concepto de Divisibilidad

Un número natural a es divisible por otro número natural b si existe otro número natural c tal que $a = b \cdot c$.

Esto también significa que a es un múltiplo de b , o bien, que b es un divisor de a .

Explicación de la definición. Pensando en los elementos que conforman una división, se tiene que:

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \text{residuo}.$$

Así que, si el número b es un divisor de un número a y además, el residuo entre ellos es cero, se tiene que:

$$\frac{a}{b} = c + 0 \quad \text{o sea,} \quad \frac{a}{b} = c \quad \Longleftrightarrow \quad a = b \cdot c.$$

decimos en este caso que b es divisor de a , o que a es múltiplo.

Nota: el símbolo $\Longleftrightarrow$; se lee como "sí solo sí".

Ejemplo

El número 12 es divisible por 3 porque $12 = 3 \cdot 4$. Por el contrario, 12 no es divisible por 5 porque la división deja residuo distinto de cero.

A continuación, se presentan los criterios de divisibilidad para los números 2, 3, 5, 7 y 11 de forma clara y organizada.

Criterio de divisibilidad para el número 2

Un número es divisible por **2** si termina en **0, 2, 4, 6 u 8**.

Ejemplos:

- 38 es divisible por 2 (termina en 8).
- 145 no es divisible por 2 (termina en 5).

Criterio de divisibilidad para el número 3

Un número es divisible por **3** si la suma de todos sus dígitos es un múltiplo de **3**.

1.2. NÚMEROS NATURALES

Ejemplos:

- 417: Sumamos sus dígitos $4 + 1 + 7 = 12$. Como 12 es múltiplo de 3 (3×4), entonces 417 es divisible por 3.
- 251: Sumamos sus dígitos $2 + 5 + 1 = 8$. Como 8 no es múltiplo de 3, 251 no es divisible por 3.

Criterio de divisibilidad para el número 5

Un número es divisible por **5** si su último dígito es **0** o **5**.

Ejemplos:

- 350 y 1,025 son divisibles por 5.
- 432 no es divisible por 5 (termina en 2).

Criterio de divisibilidad para el número 7

Un número es divisible por **7** cuando al multiplicar el dígito de las unidades por dos y restarlo al número que queda (una vez que se quitó el dígito de las unidades), el valor absoluto del resultado es un múltiplo de 7 o 0. Este proceso se puede repetir si el número es muy grande.

Ejemplos:

- **Ejemplo Caso I:** Analicemos el número **119**.
 1. Tomamos el dígito de las unidades (9) y lo multiplicamos por 2: $9 \cdot 2 = 18$
 2. Realizamos la resta: $11 - 18 = -7$.
 3. Como $|-7|$ es 7 y $7 = 7 \cdot 1$, entonces **119 es divisible por 7**.
- **Ejemplo Caso II:** Analicemos el número **189**.
 1. Tomamos el dígito de las unidades (9) y lo multiplicamos por 2: $9 \cdot 2 = 18$
 2. Realizamos la resta: $18 - 18 = 0$
 3. Como el resultado es 0, entonces **189 es divisible por 7**.

1.2. NÚMEROS NATURALES

Criterio de divisibilidad para el número 11

Un número es divisible por **11** si **sumamos los números en posición impar, por otro lado sumamos los números en posición par** (empezando de derecha a izquierda), realizamos la resta de estas cantidades, consideramos su valor absoluto y el resultado es 0 o un múltiplo de 11. Este proceso se puede repetir si el número es muy grande.

Ejemplos:

Ejemplo Caso I: Analicemos el número **759**.

1. Sumamos los dígitos en posiciones impares (empezando por la derecha): 9 (1.^a posición) $+7$ (3.^a posición) $= 16$.
2. Sumamos los dígitos en posiciones pares: 5 (2.^a posición).
3. La diferencia de dichas cantidades es $16 - 5 = 11$, entonces **759 es divisible por 11**.

Ejemplo Caso II: Analicemos el número **1,298**.

1. Sumamos los dígitos en posiciones impares (empezando por la derecha): 8 (1.^a posición) $+2$ (3.^a posición) $= 10$.
2. Sumamos los dígitos en posiciones pares: 9 (2.^a posición) $+1$ (4.^a posición) $= 10$.
3. Como la diferencia de dichas cantidades es 0, entonces **1,298 es divisible por 11**.

1.2.2. Números primos

Números primos

Un **número** es **primo** sólo si es divisible por si mismo y el número 1. Dicho de otra forma, un **número** es **primo** si solo tiene dos divisores.

Nota: El número 1 no es primo.

Ejemplo

- 9 no es número primo porque es divisible por 1, 3 y 9.
- 13 es número primo porque es divisible por 1 y 13.
- 23 es número primo porque es divisible por 1 y 23.
- 16 no es número primo porque es divisible por 1, 2, 4, 8 y 16.

Criba de Eratóstenes

La siguiente tabla muestra los números del 1 al 30 y la utilizaremos para obtener los primeros números primos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Procedimiento para hacer la Criba de Eratóstenes

1.2. NÚMEROS NATURALES

Se tacharán los números que **no** son primos y en color rojo los que **si** lo son. El procedimiento es como sigue:

1. empezamos por tachar el número 1 y reescribir el número 2 en rojo porque es un número primo;
2. se tachan todos los múltiplos del número 2;
3. se busca el siguiente número que aún esté sin tachar, se reescribe en color rojo y se tachan todos sus múltiplos;
4. se repite el paso (3) tantas veces como sea necesario para terminar de revisar los 30 números que tenemos en esta Criba.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Entonces los números primos, dentro de los primeros 30 números son: **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.** A esta última tabla se le conoce como la **Criba de Eratóstenes**

1.2.3. Números compuestos

Definición

Un **número compuesto** es un número que tiene más de dos divisores. Dicho de otra forma, es un número que es múltiplo de algún número primo.

Teorema Fundamental de la Aritmética

Todo número entero compuesto puede ser representado de forma **única** como un producto de potencias de números primos, sin tener en cuenta el orden de los factores. A esta representación se le llama la **Descomposición en Factores Primos**.

1.2. NÚMEROS NATURALES

Determinación de números compuestos y sus divisores.

Determina si los siguientes números son compuestos y encuentra sus divisores.

Ejemplo 1: El número 8.

Divisores	Explicación
1 es un divisor de 8	porque $\frac{8}{1} = 8 \implies 8 = 1 \cdot 8$
2 es un divisor de 8	porque $\frac{8}{2} = 4 \implies 8 = 2 \cdot 4$
4 es un divisor de 8	porque $\frac{8}{4} = 2 \implies 8 = 4 \cdot 2$
8 es un divisor de 8	porque $\frac{8}{8} = 1 \implies 8 = 8 \cdot 1$

Nota: El símbolo $\implies$ se lee como “**entonces**”

Los divisores de 8 son: 1, 2, 4 y 8.

Por lo tanto, el 8 es un número compuesto.

Ejemplo 2: El número 36.

Divisores	Explicación
Los divisores de 36 son: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36	Porque: $36 = 1 \cdot 36;$ $36 = 2 \cdot 18;$ $36 = 3 \cdot 12;$ $36 = 4 \cdot 9;$ $36 = 6 \cdot 6;$ $36 = 9 \cdot 4;$ $36 = 12 \cdot 3;$ $36 = 18 \cdot 2;$ $36 = 36 \cdot 1$

Por lo tanto, el 36 es un número compuesto.

Ejemplo 3: El número 45.

Divisores	Explicación
Los divisores de 45 son: 1, 3, 5, 9, 15 y 45	Porque: $45 = 1 \cdot 45;$ $45 = 3 \cdot 15;$ $45 = 5 \cdot 9;$ $45 = 9 \cdot 5;$ $45 = 15 \cdot 3;$ $45 = 45 \cdot 1$

Por lo tanto, el 45 es un número compuesto.

Ejemplo 4: El número 2.

Divisores	Explicación
Los divisores de 2 son: 1 y 2	Porque $2 = 1 \cdot 2;$ $2 = 2 \cdot 1$

Por lo tanto, el 2 no es un número compuesto, es un número primo.

1.2. NÚMEROS NATURALES

Ejemplo 5: El número 7.

Divisores	Explicación
Los divisores de 7 son: 1 y 7	Porque $7 = 1 \cdot 7$; $7 = 7 \cdot 1$

Por lo tanto, el 7 no es un número compuesto, es un número primo.

1.2. NÚMEROS NATURALES

1.2.4. Método de Euclides (Divisiones Sucesivas)

Para calcular los factores primos, se hará uso del Método de Euclides o de las Divisiones Sucesivas, esto se mostrará mediante ejemplos.

Descomposición de 60 en factores primos

Escribe el número 60 como producto de sus factores primos.

Método de Euclides	
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

1. Se escribe el número 60 y a su derecha una línea vertical. Se prueba si el primer número primo 2 es divisor del 60, si lo es se escribe a la derecha de la vertical. Como es divisor, el cociente 30 se escribe debajo del 60.
2. Si el primer número primo 2 es divisor del 30, se escribe a la derecha de la vertical. Como es divisor, el cociente 15 se escribe debajo del 30.
3. Nuevamente se prueba si el número primo 2 es divisor del 15, como el 2 no es divisor del 15, probamos con el siguiente primo, 3 si es divisor del 15. Como sí es divisor, lo escribimos a la derecha de la vertical, el cociente 5, lo escribimos debajo del 15.
4. Como los primos 2, 3 no son divisores de 5, se prueba con el siguiente número primo 5, el cual si es divisor, se escribe a la derecha de la vertical y el cociente 1 debajo del 5.
5. Cuando el cociente es 1 se detiene el proceso.

Por lo tanto, la descomposición del número 60 en sus factores primos es:

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Descomposición de 28 en factores primos

Escribe el número 28 como producto de sus factores primos.

Método de Euclides	
28	2
14	2
7	7
1	

1. El primer número primo 2 es divisor del 28, se escribe a la derecha de la línea vertical y el cociente 14 se escribe debajo del 28.
2. El 2 es divisor de 14, se escribe a la derecha de la vertical. El cociente 7 se escribe debajo del 14.
3. El número primo 7 es divisor de 7, se escribe a la derecha de la vertical. El cociente 1, lo escribimos debajo del 7.
4. Cuando el cociente es 1 se detiene el proceso.

1.2. NÚMEROS NATURALES

Por lo tanto, la descomposición del número 28 en sus factores primos es:

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Descomposición de 100 en factores primos

Escribe el número 100 como producto de sus factores primos.

Método de Euclides

100	2
50	2
25	5
5	5
1	

1. El primer número primo 2 es divisor del 100, se escribe a la derecha de la línea vertical y el cociente 50 se escribe debajo del 100.
2. El 2 es divisor de 50, se escribe a la derecha de la vertical. El cociente 25 se escribe debajo del 50.
3. El número primo 5 es divisor de 25, se escribe a la derecha de la vertical. El cociente 5, lo escribimos debajo del 25.
4. El 5 es divisor de 5, se escribe a la derecha de la vertical. El cociente 1, lo escribimos debajo del 5.
5. Cuando el cociente es 1 se detiene el proceso.

Por lo tanto, la descomposición del número 100 en sus factores primos es:

$$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2$$

1.2.5. Mínimo Común Múltiplo

Definición

El **Mínimo Común Múltiplo (mcm)** de dos o más números naturales se define como el número natural más pequeño tal que éste es múltiplo de todos ellos, es decir, es el número más pequeño que puede ser dividido entre cada uno de los números dados. En aplicación, es útil para problemas donde se busca un punto en el que diferentes ciclos o eventos se encuentren.

Explicación de la definición. Dado un número natural a , decimos que sus *múltiplos* son todos aquellos números para los cuales a es un divisor de ellos. Como ejemplo en particular, veamos el caso para los números 6 y 8. Notemos que:

- Los múltiplos de 8 son: 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, ...
- Los múltiplos de 6 son: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, ...

De lo anterior, podemos ver que los comunes múltiplos de 8 y 6 son: 24, 48, 72, 96, ..., por lo cual, siguiendo la definición tenemos que el mínimo común múltiplo es 24 y la notación utilizada para representarlo es $\text{mcm}(6,8) = 24$.

A continuación se muestra los pasos a seguir para obtener el mcm de dos números usando el método de la línea vertical.

1.2. NÚMEROS NATURALES

Procedimiento para obtener el mcm

Procedimiento	Explicación del Paso
$\begin{array}{cc c} 8 & 6 & 2 \end{array}$	Paso 1: Fila inicial. Empezamos probando con el primer número primo: el 2. Como el 8 y el 6 son números pares (se pueden dividir exactamente entre 2 sin dejar residuo), usamos este divisor. Anotamos el 2 a la derecha.
$\begin{array}{cc c} 4 & 3 & 2 \end{array}$	Paso 2: Los resultados de las divisiones son 4 y 3. Volvemos a probar con el 2. Como el 4 es par, el 2 nos sigue sirviendo, aunque no pueda dividir al 3. Anotamos el 2 a la derecha y el 3 simplemente lo bajamos intacto.
$\begin{array}{cc c} 2 & 3 & 2 \end{array}$	Paso 3: Los nuevos valores son 2 y 3. El 2 sigue siendo par, por lo que seguimos usando el primo 2. Anotamos el 2 a la derecha. El 3 lo volvemos a bajar igual.
$\begin{array}{cc c} 1 & 3 & 3 \end{array}$	Paso 4: Tenemos 1 y 3. La columna del 8 ya llegó a 1, por lo que ahí hemos terminado. Para el 3, el primo 2 ya no nos sirve. Pasamos al siguiente número primo: el 3. Como 3 se divide exactamente entre 3, lo anotamos a la derecha.
$\begin{array}{cc c} 1 & 1 & \end{array}$	Fin del proceso: Ambas columnas en la parte inferior han llegado al número 1. ¡Hemos concluido nuestras divisiones sucesivas!

Ejemplos numéricos

Encontrar los mcm de los siguientes pares de números enteros.

$$\text{a) } 14, 18 \rightarrow \begin{array}{cc|c} 14 & 18 & 2 \\ 7 & 9 & 3 \\ 7 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & \end{array} \rightarrow \text{mcm}(14, 18) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 126$$

$$\text{b) } 102, 58 \rightarrow \begin{array}{cc|c} 102 & 58 & 2 \\ 51 & 29 & 3 \\ 17 & 29 & 17 \\ 1 & 29 & 29 \\ 1 & 1 & \end{array} \rightarrow \text{mcm}(102, 58) = 2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 29 = 2958$$

1.2. NÚMEROS NATURALES

Procedimiento con descomposición en factores primos.

Para obtener el **mcm** de dos o más números por el método de descomposición en números primos:

- Se obtiene la descomposición en factores primos de los números dados.
- De las descomposiciones se identifican todos los diferentes primos que se encontraron.
- Después se toma la mayor potencia de los primos que se identificaron.
- Por último, se multiplican todos los diferentes primos con mayor potencia.

Ejemplos en problemas de aplicación

1. **Sincronización de Engranajes:** Un engranaje A tiene 24 dientes y un engranaje B tiene 40 dientes. Ambos engranajes están marcados con una línea que se alinea inicialmente. ¿Cuántas vueltas deberá dar el engranaje A para que las marcas se vuelvan a alinear por primera vez?

Resolución:

- Descomposición en factores primos: $24 = 2^3 \times 3$; $40 = 2^3 \times 5$
- Identificación de factores con mayor exponente: $2^3, 3, 5$
- Cálculo del mcm: $\text{mcm}(24, 40) = 2^3 \times 3 \times 5 = 8 \times 3 \times 5 = 120$
- Vueltas del engranaje A: $120/24 = 5$

Respuesta: El engranaje A deberá dar 5 vueltas.

2. **Programación de Mantenimiento:** Una máquina en una fábrica requiere una inspección de mantenimiento cada 15 días y una lubricación cada 20 días. Si ambas tareas se realizaron hoy, ¿cuántos días pasarán para que ambas tareas coincidan nuevamente?

Resolución:

- Descomposición en factores primos: $15 = 3 \times 5$; $20 = 2^2 \times 5$
- Identificación de factores con mayor exponente: $2^2, 3, 5$
- Cálculo del mcm: $\text{mcm}(15, 20) = 2^2 \times 3 \times 5 = 4 \times 3 \times 5 = 60$

Respuesta: Las tareas coincidirán en 60 días.

1.2.6. Máximo Común Divisor

Definición

El **Máximo Común Divisor (MCD)** de dos o más números naturales es el número más grande que puede dividir a todos ellos sin dejar residuo. Es útil para problemas donde se busca dividir un conjunto de objetos de manera equitativa y de forma óptima, es decir, buscar la máxima cantidad en la que se puedan repartir dos o mas conjunto de objetos.

1.2. NÚMEROS NATURALES

Explicación de la definición. Consideremos los números 12 y 18.

Notemos que:

- Los divisores de 12 son: 1, 2, 3, 4, 6, 12
- Los divisores de 18 son: 1, 2, 3, 6, 9, 18

Podemos ver que los números subrayados son los comunes divisores de 12 y 18, sin embargo, el número mayor de esos comunes divisores es el número 6, por lo cual, podemos decir que el Máximo Común Divisor de 12 y 18 es 6 y la notación utilizada para representarlo es $\text{MCD}(12,18)=6$.

Procedimiento para obtener el MCD

Procedimiento	Explicación del Paso
$\begin{array}{cc c} 10 & 20 & 2 \end{array}$	Paso 1: Fila inicial. Empezamos probando con el primer número primo: el 2. Como tanto el 10 como el 20 son números pares, el 2 los divide exactamente a ambos de forma simultánea. Anotamos el 2 a la derecha.
$\begin{array}{cc c} 5 & 10 & 5 \end{array}$	Paso 2: Los resultados de las divisiones son 5 y 10. Volvemos a evaluar. El número 2 divide al 10, pero NO al 5. Por lo tanto, el 2 ya no nos sirve como divisor común. Probamos con el siguiente primo: el 3. El 3 tampoco divide a ninguno. Probamos con el 5. Como el 5 divide exactamente al 5 y al 10 al mismo tiempo, lo usamos y lo anotamos a la derecha.
$\begin{array}{cc c} 1 & 2 & \end{array}$	Fin del proceso: Los nuevos valores son 1 y 2. Ya no existe ningún número primo que pueda dividir a estos dos números al mismo tiempo. Al llegar a este punto, hemos concluido nuestras divisiones sucesivas.

Ejemplos numéricos

Encuentre el MCD de las siguientes parejas o tercias de números.

$$\text{a) } 75, 45 \rightarrow \begin{array}{cc|c} 75 & 45 & 3 \\ 25 & 15 & 5 \\ 5 & 3 & \end{array} \rightarrow \text{MCD}(75, 45) = 3 \cdot 5 = 15$$

$$\text{b) } 15, 33, 42 \rightarrow \begin{array}{cc|c|c} 15 & 33 & 42 & 3 \\ 5 & 11 & 21 & \end{array} \rightarrow \text{MCD}(15, 33, 42) = 3$$

$$\text{c) } 28, 44 \rightarrow \begin{array}{cc|c} 28 & 44 & 2 \\ 14 & 22 & 2 \\ 7 & 11 & \end{array} \rightarrow \text{MCD}(28, 44) = 2 \cdot 2 = 4$$

1.2. NÚMEROS NATURALES

$$\text{d) } 80, 100, 60 \rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} 80 & 100 & 60 & 2 \\ 40 & 50 & 30 & 2 \\ 20 & 25 & 15 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & \end{array} \rightarrow \text{MCD}(80, 100, 60) = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$$

Procedimiento con descomposición en factores primos.

Para obtener el **MCD** de dos o más números:

- Se obtiene la descomposición en factores primos de los números dados.
- De las descomposiciones se identifican todos los primos en común que se encontraron.
- Se toma la menor potencia de los primos que se identificaron.
- Por último, se multiplican todos los primos en común con la menor potencia.

Ejemplos en problemas de aplicación

1. **División de Materiales:** Un ingeniero tiene una lámina de metal de 120 cm de largo por 72 cm de ancho. Quiere cortarla en piezas cuadradas del mayor tamaño posible sin desperdiciar material. ¿Cuál es la longitud del lado de cada pieza?

Resolución:

- Descomposición en factores primos: $120 = 2^3 \times 3 \times 5$; $72 = 2^3 \times 3^2$
- Identificación de factores comunes con menor exponente: $2^3, 3$
- Cálculo del mcd: $\text{mcd}(120, 72) = 2^3 \times 3 = 8 \times 3 = 24$

Respuesta: La longitud del lado de cada pieza debe ser de 24 cm.

2. **Creación de Paquetes:** En un almacén, se tienen 96 tornillos de tipo A y 144 tuercas de tipo B. Se quieren empaquetar en cajas de manera que cada caja contenga el mismo número de tornillos y el mismo número de tuercas, sin que sobre ningún elemento. ¿Cuál es la cantidad máxima de cajas que se pueden preparar?

Resolución:

- Descomposición en factores primos: $96 = 2^5 \times 3$; $144 = 2^4 \times 3^2$
- Identificación de factores comunes con menor exponente: $2^4, 3$
- Cálculo del mcd: $\text{mcd}(96, 144) = 2^4 \times 3 = 16 \times 3 = 48$

Respuesta: Se pueden preparar un máximo de 48 cajas.

1.3. NÚMEROS ENTEROS

1.3. Números Enteros

1.3.1. Suma de números enteros

Definición de Suma

La **suma** o **adición** consiste en la incorporación de nuevos elementos a un conjunto numérico, esto es, la fusión de dos números para obtener uno nuevo.

Los elementos de la suma reciben el nombre de **sumandos** y el resultado **suma**.

Se representa con el símbolo (+)

Las propiedades de la suma para los números Enteros son:

- **Conmutativa:** El orden de los sumandos no altera el resultado.

$$5 + 3 = 3 + 5 = 8$$

- **Asociativa:** La suma de varios sumandos no se modifica, si se sustituye algunos sumandos por su suma.

$$6 + 9 + 7 + 11 = 15 + 18 = 6 + 16 + 11 = 33$$

- **Elemento neutro:** Cualquier numero entero sumado con el elemento neutro (0), da como resultado el mismo número.

$$7 + 0 = 7$$

Ejemplos de sumas con números enteros

Ejemplo 1: Sumas de dos números enteros positivos:

$$6 + 7 = 13$$

Ejemplo 2: Sumas de dos números enteros negativos:

$$-6 + (-7) = -13$$

Nota: En la suma de dos o más números con el mismo signo (ambos positivos o ambos negativos), los números se suman y el signo se mantiene.

Ejemplo 3: Sumas de un número positivo con un número negativo:

$$-6 + 7 = 1$$

$$6 + (-7) = -1$$

Nota: La suma entre un número positivo y un número negativo sigue la regla: Los números se restan y el resultado conserva el signo del número mayor.

1.3. NÚMEROS ENTEROS

Cuando se tienen 3 o más sumandos se recomienda utilizar la propiedad asociativa, como se muestra a continuación.

Ejemplo 4:

$$9 + (-6) + (-15) + 17 = (9 + 17) + (-6 - 15) = 26 + (-21) = 5$$

1.3.2. Resta de números enteros

Definición de Resta

La **resta** o **diferencia** es la operación inversa de la suma. Consiste en la exclusión de elementos dentro de un conjunto numérico.

Los elementos de la resta reciben el nombre de **minuendo** y **sustraendo** y el resultado **resta** o **diferencia**.

Se representa con el símbolo $(-)$

Ejemplos de restas con números enteros

Ejemplo 1: Resta de dos enteros positivos.

$$9 - 6 = 3$$

$$6 - 9 = -3$$

Ejemplo 2: Resta de dos enteros negativos.

$$(-9) - (-6) = -9 + 6 = -3$$

$$(-6) - (-9) = -6 + 9 = 3$$

Nota: La resta dos enteros positivos o dos enteros negativos es equivalente a sumar un entero positivo con un entero negativo.

Ejemplo 3: Resta de un entero positivo con un entero negativo.

$$9 - (-6) = 9 + 6 = 15$$

$$(-9) - 6 = -9 - 6 = -15$$

Nota: La resta de un entero positivo con un entero negativo es equivalente a la suma de dos enteros positivos o dos enteros negativos.

1.3. NÚMEROS ENTEROS

1.3.3. Multiplicación de números enteros

Definición de multiplicación

La multiplicación o producto, es la representación abreviada de la suma de un mismo número entero, varias veces.

$$a \cdot n = \underbrace{a + a + a + \dots a}_{n-\text{veces}}$$

Se representa con el símbolo $(\cdot)$, $(\times)$ o colocando los números entre paréntesis $()$.

Los elementos de la multiplicación reciben el nombre de factores y el resultado multiplicación o producto.

Las propiedades de la multiplicación para los números Enteros son:

- **Conmutativa:** El orden de los factores no altera el producto.

$$5 \cdot 3 = 3 \cdot 5 = 15$$

- **Asociativa:** El producto de varios números o factores no se modifica, si se sustituye algunos factores por su producto.

$$6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 = 30 \cdot 14 = 6 \cdot 35 \cdot 2 = 420$$

- **Elemento neutro:** Cualquier numero entero multiplicado con el elemento neutro (1), da como resultado el mismo número.

$$7 \cdot 1 = 7$$

- **Distributiva:** Multiplicación sobre la adición o sustracción de dos o más números $2(3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 6 + 10 = 16$

En el caso de la multiplicación de números enteros negativos es importante mencionar la ley de los signos para la multiplicación indica que el producto de dos números con el mismo signo da como resultado un número positivo, mientras que el producto de un número positivo, con un número negativo da como resultado un número negativo. Esto se puede representar de la siguiente forma:

$$(+)(+) = +$$

$$(+)(-) = -$$

$$(-)(+) = -$$

$$(-)(-) = +$$

1.3. NÚMEROS ENTEROS

Ejemplos de multiplicaciones con números enteros

- $5(3) = 15$
- $-5(3) = -15$
- $5(-3) = -15$
- $-5(-3) = 15$
- $(-2)(3) = -6$
- $-5(-9) = 45$
- $(-3)6 = -18$
- $45(-3) = -135$
- $(-13)(-5) = 65$
- $3(-2)(-5) = 30$

1.3.4. Jerarquía de operaciones

Los símbolos de agrupación se utilizan para indicar que las operaciones encerradas en ellos deben resolverse primero, formando un bloque dentro de la expresión. Los principales son: **paréntesis** (), **corchetes** [] y **llaves** { }. Se pueden usar por separado o emplearlos colocándose unos dentro de otros para indicar varios niveles de agrupación.

Barras de valor absoluto | |: además de agrupar, indican que el resultado dentro de ellas debe tomarse como su valor positivo (distancia al cero).

Para operar correctamente una expresión matemática que involucra distintas operaciones, es necesario seguir un orden fijo llamado **jerarquía de las operaciones**. El orden es el siguiente:

1. **Paréntesis, corchetes, llaves y valor absoluto.** Se resuelven primero todos los símbolos de agrupación, comenzando desde los más internos hacia los más externos.
2. **Potencias y raíces.** Se calculan después de eliminar los agrupadores.
3. **Multiplicaciones y divisiones.** Se efectúan en el orden en que aparecen, de izquierda a derecha.
4. **Sumas y restas.** Se realizan también de izquierda a derecha, al final.

Nota: Es importante destacar que los símbolos de agrupación no solo indican prioridad, también agrupan operaciones que deben resolverse como un solo bloque.

Ejemplo 1: Sin símbolos de agrupación (solo operaciones básicas)

Calcula: $18 \div 3 \times 2 - 5 + 4^2$

Pasos	Explicación
$18 \div 3 \times 2 - 5 + 16$ $= 6 \times 2 - 5 + 16$	Primero, resolvemos la potencia: $4^2 = 16$. División y multiplicación van de izquierda a derecha: $18 \div 3 = 6$.
$= 12 - 5 + 16$ $= 7 + 16$	Multiplicamos: $6 \times 2 = 12$. Restamos: $12 - 5 = 7$.
$= 23$	Finalmente, sumamos: $7 + 16 = 23$.

1.3. NÚMEROS ENTEROS

Ejemplo 2: Con símbolos de agrupación (paréntesis y corchetes)

Calcula: $8 \times [5 - (6 - 3) \times 2] + 4$

Pasos	Explicación
$8 \times [5 - 3 \times 2] + 4$	Resolvemos el paréntesis más interno: $(6 - 3) = 3$.
$= 8 \times [5 - 6] + 4$	Dentro del corchete, la multiplicación tiene prioridad: $3 \times 2 = 6$.
$= 8 \times (-1) + 4$	Resolvemos el corchete: $5 - 6 = -1$.
$= -8 + 4$	Multiplicamos: $8 \times (-1) = -8$.
$= -4$	Sumamos: $-8 + 4 = -4$.

Ejemplo 3: Con valor absoluto y operadores anidados

Calcula: $30 - |12 \div 3 + [2 \times 4^2 - (6 - 2)^2]|$

Pasos	Explicación
$30 - 12 \div 3 + [2 \times 16 - 4^2] $	Resolvemos el paréntesis: $(6 - 2) = 4$ luego $4^2 = 16$.
$= 30 - 12 \div 3 + [32 - 16] $	Potencia: $4^2 = 16$, luego $2 \times 16 = 32$.
$= 30 - 12 \div 3 + 16 $	Resolvemos el corchete: $32 - 16 = 16$.
$= 30 - 4 + 16 $	División dentro del valor absoluto: $12 \div 3 = 4$.
$= 30 - 20 $	Suma dentro del valor absoluto: $4 + 16 = 20$.
$= 30 - 20$	El valor absoluto de 20 es 20.
$= 10$	Restamos: $30 - 20 = 10$.

1.3.5. Propiedades de los exponentes

Concepto de potencia

Una **potencia** es la representación abreviada de la multiplicación de un número $a \in \mathbb{Z}$ por sí mismo n -veces, con $n \in \mathbb{N}$ o $n = 0$. Su notación matemática está dada por:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-veces}}$$

Donde a se denomina base y n exponente.

Ejemplo de potencias

La potencia 2^5 representa el número entero 2 multiplicado por sí mismo 5 veces:

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

En este caso, la base es 2 y el exponente es 5.

1.3. NÚMEROS ENTEROS

Casos especiales:

- Cuando la base es cero y el exponente es cualquier número entero positivo, el resultado de la potencia es siempre cero.

$$0^7 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

- Cuando la base es un número entero diferente de cero ($a \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$) y el exponente es cero $n = 0$, el resultado de la potencia es siempre 1.

1. $9^0 = 1$

2. $125^0 = 1$

Potencia entera positiva

Observemos que en la definición de potencia, la base es un número entero y el exponente un número entero positivo. Al trabajar con bases negativas, es indispensable colocar la base entre paréntesis () y aplicar las leyes de los signos correspondientes.

Si la base no se encuentra entre paréntesis, el exponente afectará únicamente al número que le precede inmediatamente, conservando el signo fuera de la potencia.

Ejemplos con bases positivas y negativas

1. La potencia 9^2 , con base 9 y exponente 2:

$$9^2 = 9 \cdot 9 = 81$$

2. La potencia 3^4 , con base 3 y exponente 4:

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

3. La potencia $(-5)^3$, con base -5 y exponente 3:

$$(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125$$

4. En la expresión -5^3 , el signo negativo permanece fuera de la potencia. Por lo tanto, se calcula la potencia 5^3 (con base 5 y exponente 3) y se conserva el signo negativo:

$$-5^3 = -5 \cdot 5 \cdot 5 = -125$$

5. La potencia $(-2)^6$ con base -2 y exponente 6.

$$(-2)^6 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = 64$$

6. En la expresión -2^6 , el signo negativo permanece fuera de la potencia. Por lo tanto, se calcula la potencia 2^6 (con base 2 y exponente 6) y se conserva el signo negativo:

$$-2^6 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -64$$

1.4. OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Ejemplos con símbolos de agrupación

1. En la expresión $-(-2^4)$, evaluamos primero la potencia ubicada dentro del paréntesis. Dado que el exponente afecta únicamente al número **2** obtenemos:

$$-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$$

A continuación, multiplicamos por el signo negativo que se encuentra fuera del paréntesis:

$$-(-2^4) = -(-16) = 16$$

2. En la expresión $-(-3)^6$, primero evaluamos la potencia $(-3)^6$.

$$(-3)^6 = (-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3) = 729$$

A continuación, multiplicamos por el signo negativo que se encuentra fuera de la potencia:

$$-(-3)^6 = -729$$

1.4. Operaciones con Números Racionales

1.4.1. Fracciones equivalentes

Definición

Dos fracciones son **equivalentes** cuando representan la misma cantidad, aunque tengan diferentes numeradores y denominadores. Para obtener una fracción equivalente, se multiplica o se divide **el numerador y el denominador por el mismo número distinto de cero**:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} \quad \text{o} \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Ejemplo

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} \quad (\text{multiplicando por 2 y 3 respectivamente}).$$

Ejemplo 1: Fracciones equivalentes

Problema: Encuentra el número faltante para que las fracciones sean equivalentes:

$$\frac{3}{7} = \frac{?}{28}$$

1.4. OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Pasos	Explicación
$\frac{3}{7} = \frac{?}{28}$	El denominador pasó de 7 a 28.
$28 \div 7 = 4$	El denominador se multiplicó por 4.
$3 \times 4 = 12$	El numerador también debe multiplicarse por 4.
$\frac{3}{7} = \frac{12}{28}$	La fracción equivalente es $\frac{12}{28}$.

1.4.2. Simplificación de una fracción

Definición

Simplificar una fracción significa encontrar una fracción equivalente con el numerador y denominador **lo más pequeños posible**. Para ello, se divide ambos por su **máximo común divisor (MCD)**. Un proceso equivalente es descomponer en factores primos y cancelar los factores idénticos en numerador y denominador.

Simplificación de fracciones

Problema: Simplifica $\frac{54}{72}$ hasta su forma irreducible.

Pasos	Explicación
$\frac{54}{72}$	Buscamos el MCD de 54 y 72.
$54 = 2 \cdot 3^3; \quad 72 = 2^3 \cdot 3^2$	Factorización prima.
$\text{MCD}(54, 72) = 2 \cdot 3^2 = 18$	Factores comunes con menor exponente.
$\frac{54 \div 18}{72 \div 18} = \frac{3}{4}$	Dividimos numerador y denominador por 18.
$\frac{54}{72} = \frac{3}{4}$	Fracción irreducible ($\text{MCD}(3, 4) = 1$).

1.4. OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Simplificación de fracciones (método de factores primos)

Problema: Simplifica $\frac{54}{72}$ hasta su forma irreducible.

$$\frac{54}{72}$$

$$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3}$$

$$= \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3}{\cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}$$

$$= \frac{3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$$

Expresamos numerador y denominador como producto de factores primos.

Factorización prima: $54 = 2 \cdot 3^3$; $72 = 2^3 \cdot 3^2$.

Eliminamos los factores comunes (un 2 y dos 3's) en el numerador y denominador.

Multiplicamos los factores restantes. La fracción es irreducible ($\text{MCD}(3, 4) = 1$).

1.4.3. Suma y Resta en los números racionales $\mathbb{Q}$

Definición

La **suma** o **resta** de dos o más números racionales, escritos como fracciones, se divide en dos casos: **fracciones homogéneas** (igual denominador) y **fracciones heterogéneas** (denominador distinto).

Fracciones homogéneas

Fracciones homogéneas

Para sumar y/o restar dos o más fracciones con el mismo denominador, **solo se operan los numeradores** y se toma como denominador de la fracción resultante al denominador común de todas ellas.

Ejemplos de sumas y restas de fracciones homogéneas

$$\bullet \frac{5}{3} + \frac{11}{3} = \frac{5 + 11}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\bullet \frac{3}{4} + 9 = \frac{3}{4} + \frac{36}{4} = \frac{3 + 36}{4} = \frac{39}{4}$$

$$\bullet \frac{21}{7} - \frac{17}{7} = \frac{21 - 17}{7} = \frac{4}{7}$$

$$\bullet \frac{4}{5} - \frac{7}{5} = \frac{4 - 7}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$\bullet \frac{5}{2} + \frac{7}{2} - \frac{9}{2} = \frac{5 + 7 - 9}{2} = \frac{3}{2}$$

1.4. OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Fracciones heterogéneas

Fracciones heterogéneas.

Para sumar o restar dos o más fracciones con denominador diferente, se deben reescribir las fracciones a fracciones equivalentes con un común denominador. Posteriormente, se suman o restan las fracciones equivalentes. Finalmente, de ser posible, simplificar el resultado.

Nota. El común denominador es el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores de las fracciones que se quieren operar.

Ejemplos

$$\bullet \frac{2}{3} + \frac{5}{2} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{4}{6} + \frac{15}{6} = \frac{19}{6}$$

$$\bullet \frac{5}{4} - \frac{7}{6} = \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 3} - \frac{7 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{15}{12} - \frac{14}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\bullet \frac{3}{2} + \frac{8}{3} - \frac{10}{21} = \frac{3 \cdot 21}{2 \cdot 21} + \frac{8 \cdot 14}{3 \cdot 14} - \frac{10 \cdot 2}{21 \cdot 2} = \frac{63}{42} + \frac{112}{42} - \frac{20}{42} = \frac{63 + 112 - 20}{42} = \frac{155}{42}$$

$$\bullet \frac{4}{5} + 2 - \frac{13}{3} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 15}{1 \cdot 15} - \frac{13 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{12}{15} + \frac{30}{15} - \frac{80}{15} = \frac{12 + 30 - 80}{15} = -\frac{38}{15}$$

$$\bullet \frac{15}{2} - \frac{29}{8} - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{15 \cdot 4}{2 \cdot 4} - \frac{29 \cdot 1}{8 \cdot 1} - \left(-\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2}\right) = \frac{60}{8} - \frac{29}{8} + \frac{6}{8} = \frac{60 - 29 + 6}{8} = \frac{37}{8}$$

1.4.4. Multiplicación en los números racionales $\mathbb{Q}$

Definición

Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$, entonces:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{a \cdot c \cdot e}{b \cdot d \cdot f}$$

Esto es, el **producto** de dos o más números racionales es un nuevo número racional cuyo **numerador** es el producto de los numeradores y cuyo **denominador** es el producto de los denominadores, respectivamente.

Nota: Para efectuar las operaciones de multiplicación y división con números racionales, se sugiere simplificar los factores si es posible y a continuación indicar las operaciones a partir de la definición, factorizar y simplificar.

1.4. OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Ejemplos

Efectúa la operación que se indica y simplifica:

a)

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 4} = \frac{15}{32}$$

b)

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 8 \cdot 3}{4 \cdot 9 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 2^3 \cdot 3}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2} = 1$$

c)

$$-\frac{75}{27} \cdot \left(-\frac{9}{20}\right) = \frac{5}{4}$$

d)

$$\frac{21}{26} \cdot \left(-\frac{65}{35}\right) = -\frac{21 \cdot 65}{26 \cdot 35} = -\frac{(7 \cdot 3) \cdot (13 \cdot 5)}{(13 \cdot 2) \cdot (7 \cdot 5)} = -\frac{3}{2}$$

e)

$$\frac{6}{35} \cdot \frac{14}{9} \cdot \frac{15}{8} = \frac{6 \cdot 14 \cdot 15}{35 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{(2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5)}{(5 \cdot 7) \cdot 3^2 \cdot 2^3} = \frac{1}{2}$$

f)

$$-\frac{7}{16} \left(\frac{32}{-24}\right) \left(-\frac{9}{21}\right) = -\frac{7}{16} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{7} = -\frac{7 \cdot 4 \cdot 3}{16 \cdot 3 \cdot 7} = -\frac{1}{4}$$

g)

$$-\frac{8}{9} \left(-\frac{3}{4}\right) \left(-\frac{15}{10}\right) = -\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{2^3 \cdot 3 \cdot 3}{3^2 \cdot 2^2 \cdot 2} = -1$$

1.4.5. División de Números Racionales

Términos de la división de fracciones

En una división entre dos fracciones. Llamamos **fracción dividendo** a la primera fracción de izquierda a derecha, y **fracción divisor** a la segunda fracción.

Por ejemplo, en la división $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$, la fracción $\frac{1}{2}$ es la fracción dividendo y la fracción $\frac{3}{4}$ es la fracción divisor.

1.4. OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Recíproco o Inverso Multiplicativo

El **recíproco** de un número (o inverso multiplicativo) es aquel número que, al ser multiplicado por el número inicial, da como producto **1**.

Por ejemplo, el recíproco de **3** es $\frac{1}{3}$, ya que $3 \times \frac{1}{3} = 1$.

Método del recíproco multiplicativo

Para realizar la división de dos fracciones mediante este método, se sigue el siguiente algoritmo:

1. Expresar la división como multiplicación, sustituyendo por su recíproco a la fracción divisor.
2. Realizar la multiplicación de fracciones (directa).
3. Simplificar el resultado.

Método del recíproco multiplicativo

Ejemplo 1: División de fracciones $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$

Realizar la siguiente división: $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$

Paso	Desarrollo
1. Expresar como multiplicación	$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} \rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$
2. Realizar la multiplicación	$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12}$
3. Simplificar el resultado	$\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

Nota: Si las fracciones iniciales pueden simplificarse, simplifícalas antes de operar; ayuda mucho en las cuentas.

Ejemplo 2: División con simplificación previa $\frac{24}{36} \div \frac{46}{54}$

Realizar la siguiente división: $\frac{24}{36} \div \frac{46}{54}$

Antes de hacer la división simplificamos ambas fracciones:

$$\frac{24}{36} \div \frac{46}{54} = \frac{2}{3} \div \frac{23}{27}$$

Ahora realizamos la división simplificada: $\frac{2}{3} \div \frac{23}{27}$

1.4. OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Paso	Desarrollo
1. Expresar como multiplicación	$\frac{2}{3} \div \frac{23}{27} \longrightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{27}{23}$
2. Realizar la multiplicación	$\frac{2}{3} \cdot \frac{27}{23} = \frac{54}{69}$
3. Simplificar el resultado	$\frac{54}{69} = \frac{18}{23}$

Ejemplo 3: División de más de dos fracciones

División de más de dos fracciones: Para realizar la división de más de dos fracciones, el procedimiento es exactamente el mismo (se invierten todos los divisores sucesivos).

Ejemplo: $\frac{1}{2} \div \frac{2}{3} \div \frac{3}{4} \div \frac{4}{5}$

Paso	Desarrollo
1. Invertir divisores	$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4}$
2. Multiplicar numeradores y denominadores	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{60}{48}$
3. Simplificar el resultado	$\frac{60}{48} = \frac{5}{4}$

Método del sándwich

Método del sándwich.

Para realizar la **división** de dos fracciones mediante el método del Sándwich se sigue el siguiente algoritmo:

1. Escribir la división como una nueva fracción compuesta cuyo numerador será la fracción dividendo, y cuyo denominador será la fracción divisor.
2. Multiplicar los números que se encuentran en los extremos de la expresión; este producto será el numerador de la fracción resultante.
3. Multiplicar los números que se encuentran en el centro (los medios); este producto será el denominador de la fracción resultante.

1.4. OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Ejemplo: Método del Sándwich

Realizar la siguiente división mediante el método del Sándwich: $\frac{3}{4} \div \frac{8}{10}$

Paso	Expresión matemática
1. Escribir la división como una fracción compuesta (numerador = dividendo, denominador = divisor).	$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{8}{10}}$
2. y 3. Multiplicar extremos ($3 \cdot 10$) para el numerador , y medios ($4 \cdot 8$) para el denominador .	$\frac{3 \cdot 10}{4 \cdot 8} = \frac{30}{32}$
4. Simplificar el resultado final.	$\frac{30}{32} = \frac{15}{16}$

1.4.6. Potencias enteras

Aplica las Leyes de los Exponentes para calcular los siguientes ejercicios.

Ejemplo 1

$$\left(\frac{99}{100}\right)^0$$

Operaciones	Explicaciones
$\left(\frac{99}{100}\right)^0 = 1$	Todo número racional, diferente de cero, elevado al exponente cero es la unidad.

Ejemplo 2

$$\left(-\frac{23}{24}\right)^0$$

Operaciones	Explicaciones
$\left(-\frac{23}{24}\right)^0 = 1$	Todo número racional, diferente de cero, elevado al exponente cero es la unidad.

1.4. OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Ejemplo 3

$$\left(\frac{11}{10}\right)^{-1}$$

Operaciones	Explicaciones
$\left(\frac{11}{10}\right)^{-1} = \frac{10}{11}$	El inverso del número $\frac{a}{b}$ es $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

Ejemplo 4

$$\left(-\frac{36}{35}\right)^{-1}$$

Operaciones	Explicaciones
$\left(-\frac{36}{35}\right)^{-1} = -\frac{35}{36}$	El inverso del número $\frac{a}{b}$ es $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

Ejemplo 5

$$(23)^{-1}$$

Operaciones	Explicaciones
$(23)^{-1} = \frac{1}{23}$	El inverso de un número entero es una fracción.

Ejemplo 6

$$(-15)^{-1}$$

Operaciones	Explicaciones
$(-15)^{-1} = -\frac{1}{15}$	El inverso de un número entero es una fracción.

1.4. OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Ejemplo 7

$$\left(\frac{1}{43}\right)^{-1}$$

Operaciones	Explicaciones
$\left(\frac{1}{43}\right)^{-1} = 43$	El inverso de una fracción, cuyo numerador es la unidad, es un número entero.

Ejemplo 8

$$\left(-\frac{1}{7}\right)^{-1}$$

Operaciones	Explicaciones
$\left(-\frac{1}{7}\right)^{-1} = -7$	El inverso de una fracción, cuyo numerador es la unidad, es un número entero.

Base racional mayor que cero

Ejemplo 9. (exponente par)

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4$$

Operaciones	Explicaciones
$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$	La potencia de un cociente es el cociente de las potencias.

Ejemplo 10. (exponente impar)

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

Operaciones	Explicaciones
$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$	La potencia de un cociente es el cociente de las potencias.

1.4. OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Base racional menor que cero

Ejemplo 11. (exponente par)

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4$$

Operaciones	Explicaciones
$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{(-2)^4}{3^4} = \frac{16}{81}$	La potencia de un cociente es el cociente de las potencias. También es válido: $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

Ejemplo 12.(exponente impar)

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3$$

Operaciones	Explicaciones
$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{3^3} = -\frac{8}{27}$	La potencia de un cociente es el cociente de las potencias. También es válido: $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{2^3}{3^3} = -\frac{8}{27}$

Potencia de una potencia

Ejemplo 13

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3$$

Operaciones	Explicaciones
$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{(2)(3)} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$ $= \frac{1^6}{2^6} = \frac{1}{64}$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

1.4. OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Ejemplo 14

$$\left[\left(-\frac{1}{2} \right)^2 \right]^3$$

Operaciones	Explicaciones
$\left[\left(-\frac{1}{2} \right)^2 \right]^3 = \left(-\frac{1}{2} \right)^{(2)(3)}$ $= \left(-\frac{1}{2} \right)^6 = \frac{(-1)^6}{2^6} = \frac{1}{64}$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $\left(\frac{a}{b} \right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Exponente entero negativo

Ejemplo 15

$$\left(\frac{4}{3} \right)^{-3}$$

Operaciones	Explicaciones
$\left(\frac{4}{3} \right)^{-3} = \left(\frac{3}{4} \right)^3 = \frac{27}{64}$	$\left(\frac{a}{b} \right)^{-n} = \left(\frac{b}{a} \right)^n$

Realiza los siguientes ejercicios aplicando las Leyes de los Exponentes. Deja indicados los resultados con exponentes positivos.

Ejemplo 16

$$\left(\frac{2}{3} \right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^4$$

Operaciones	Explicaciones
$\left(\frac{2}{3} \right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^4 = \left(\frac{2}{3} \right)^{3+4} = \left(\frac{2}{3} \right)^7 = \frac{128}{2187}$	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

1.4. OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Ejemplo 17

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-4}$$

Operaciones	Explicaciones
$\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{4}\right)^{3-4} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3}$	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Ejemplo 18

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8}{\left(\frac{1}{2}\right)^5}$$

Operaciones	Explicaciones
$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8}{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{8-5} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Ejemplo 19

$$\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{-8}}{\left(\frac{1}{10}\right)^5}$$

Operaciones	Explicaciones
$\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{-8}}{\left(\frac{1}{10}\right)^5} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-8-5} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-13} = 10^{13}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

1.4. OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Ejemplo 20

$$\left[\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]^5$$

Operaciones	Explicaciones
$\left[\left(\frac{3}{5}\right)^2\right]^5 = \left(\frac{3}{5}\right)^{2 \cdot 5} = \left(\frac{3}{5}\right)^{10} = \frac{3^{10}}{5^{10}}$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Ejemplo 21

$$\left[\left(\frac{7}{6}\right)^{-2}\right]^4$$

Operaciones	Explicaciones
$\left[\left(\frac{7}{6}\right)^{-2}\right]^4 = \left(\frac{7}{6}\right)^{-8} = \left(\frac{6}{7}\right)^8$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Ejemplo 22

$$\left[\left(\frac{9}{8}\right)^2\right]^{-4}$$

Operaciones	Explicaciones
$\left[\left(\frac{9}{8}\right)^2\right]^{-4} = \left(\frac{9}{8}\right)^{-8} = \left(\frac{8}{9}\right)^8$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Ejemplo 23

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^3$$

Operaciones	Explicaciones
$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^3 = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}\right)^3 = \left(\frac{10}{21}\right)^3 = \frac{1000}{9261}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

1.4. OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Ejemplo 24

$$\left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{24}{27}\right)^5$$

Operaciones	Explicaciones
$\left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{24}{27}\right)^5 = \left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^5$ $= \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$	Simplificación de fracciones $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ y simplificación de fracciones

1.4.7. Jerarquía de operaciones

Las operaciones se resuelven siguiendo estrictamente el siguiente orden:

1. Símbolos de agrupación
2. Potencias y raíces
3. Multiplicaciones y divisiones (de izquierda a derecha)
4. Sumas y restas (de izquierda a derecha)

Ejemplos sin símbolos de agrupación

Determina el resultado de las siguientes operaciones.

Ejemplo 1

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{8}$$

Operaciones	Explicaciones
$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{8}$	Se efectúa la multiplicación de racionales.
$= \frac{3}{4} + \frac{2 \cdot 5}{5 \cdot 8}$	Se cancelan factores del numerador y denominador; y se simplifica el número.
$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$	
$= 1$	Se suman las fracciones homogéneas.

1.4. OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Ejemplo 2

$$\frac{7}{3} - \frac{4}{9} \div \frac{2}{3}$$

Operaciones	Explicaciones
$\frac{7}{3} - \frac{4}{9} \div \frac{2}{3}$ $= \frac{7}{3} - \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2}$ $= \frac{7}{3} - \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 2}$ $= \frac{7}{3} - \frac{2}{3}$ $= \frac{5}{3}$	Se utiliza el inverso de la fracción que está después del símbolo de división para cambiar la operación a una multiplicación. Se efectúa la multiplicación de racionales y se expresa cada factor en su descomposición en números primos Se cancelan factores del numerador y denominador en la segunda fracción Se restan las fracciones homogéneas.

Ejemplo 3

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{10}$$

Operaciones	Explicaciones
$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{10}$ $= \frac{4}{9} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{10}$ $= \frac{4}{9} + \frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5}$ $= \frac{4}{9} + \frac{1}{4}$ $= \frac{16}{36} + \frac{9}{36}$ $= \frac{25}{36}$	Se resuelve la potencia. Se efectúa la multiplicación de racionales y se expresa cada factor en su descomposición en números primos Se simplifica la segunda fracción. Se calculan las fracciones equivalentes, con denominador común igual al m.c.m.(9, 4) = 36 Se suman las fracciones homogéneas.

1.4. OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Ejemplo 4

$$\frac{3}{2} - \frac{4}{5} - \frac{1}{3} \div \frac{5}{6} + \frac{7}{10}$$

Operaciones	Explicaciones
$\frac{3}{2} - \frac{4}{5} - \frac{1}{3} \div \frac{5}{6} + \frac{7}{10}$ $= \frac{3}{2} - \frac{4}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5} + \frac{7}{10}$ $= \frac{3}{2} - \frac{4}{5} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5} + \frac{7}{10}$ $= \frac{3}{2} - \frac{4}{5} - \frac{2}{5} + \frac{7}{10}$ $= \frac{3}{2} - \frac{6}{5} + \frac{7}{10}$ $= \frac{15}{10} - \frac{12}{10} + \frac{7}{10}$ $= \frac{15 - 12 + 7}{10} = \frac{10}{10} = 1$	Primero se resuelve la multiplicación y la división. Se efectúa la multiplicación de racionales y se expresa cada factor en su descomposición en números primos. La división se intercambia por un producto de fracciones. Simplifica la primera fracción y efectúa la multiplicación de fracciones que aún queda, descomponiendo en factores primos cada factor. Se simplifica la segunda fracción. Se calcula la resta de fracciones homogéneas. Se calculan las fracciones equivalentes, con denominador común igual al m.c.m.(2, 5, 10) = 10. Se suman las fracciones homogéneas y se simplifica la solución.

1.4. OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Ejemplo 5

$$\frac{5}{4} \div \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{15} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Operaciones	Explicaciones
$\frac{5}{4} \div \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{15} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$ $= \frac{5}{4} \div \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{15} + \frac{9}{4}$ $= \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{15} + \frac{9}{4}$ $= \frac{5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{9}{4}$ $= \frac{1}{2} + \frac{9}{4}$ $= \frac{2}{4} + \frac{9}{4}$ $= \frac{11}{4}$	Se efectúa la potencia de la fracción. Se cambia la operación de división por una multiplicación escribiendo el inverso de $\frac{2}{3}$ Se efectúa la multiplicación de racionales y se expresa cada factor en su descomposición en números primos. Se simplifica la primera fracción. Se calculan las fracciones equivalentes, utilizando como denominador común el m.c.m.(2, 4) = 4 Se suman las fracciones homogéneas.

1.4. OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Ejemplos con símbolos de agrupación

Determina el resultado de las siguientes operaciones.

Ejemplo 6

$$\frac{1}{2} + \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} \right) \right]$$

Operaciones	Explicaciones
$\frac{1}{2} + \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} \right) \right]$ $= \frac{1}{2} + \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{10} - \frac{5}{10} \right) \right]$ $= \frac{1}{2} + \left[\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{3}{10} \right) \right]$ $= \frac{1}{2} + \left[-\frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5} \right]$ $= \frac{1}{2} - \frac{9}{40}$ $= \frac{20}{40} - \frac{9}{40}$ $= \frac{11}{40}$	Se efectúa la operación del símbolo de agrupación que esté más interno, en este caso es el paréntesis. Para ello se escriben las fracciones equivalentes con común denominador m.c.m.(5, 2) = 10. Se realiza la resta, como la fracción resultó negativa se mantienen los paréntesis para realizar la multiplicación dentro de los corchetes. Se multiplican las fracciones dentro de los corchetes y se escriben en su descomposición en números primos. Se simplifica la segunda fracción. Se calculan las fracciones equivalentes, utilizando como denominador común el m.c.m.(2, 40) = 40 Se suman las fracciones homogéneas.

1.4. OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Ejemplo 7

$$2 - \left\{ \frac{1}{3} + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) \right] \right\}$$

Operaciones	Explicaciones
$2 - \left\{ \frac{1}{3} + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) \right] \right\}$ $= 2 - \left\{ \frac{1}{3} + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{12} + \frac{2}{12} \right) \right] \right\}$ $= 2 - \left\{ \frac{1}{3} + \left[\frac{1}{2} - \frac{5}{12} \right] \right\}$ $= 2 - \left\{ \frac{1}{3} + \left[\frac{6}{12} - \frac{5}{12} \right] \right\}$ $= 2 - \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \right\}$ $= 2 - \left\{ \frac{4}{12} + \frac{1}{12} \right\}$ $= 2 - \frac{5}{12}$ $= \frac{24}{12} - \frac{5}{12}$ $= \frac{19}{12}$	Se efectúa la operación del símbolo de agrupación más interno, en este caso es el paréntesis. Para ello se escriben las fracciones equivalentes con común denominador m.c.m.(4, 6) = 12 Se realiza la suma dentro del paréntesis y se multiplica el resultado por el signo negativo que está fuera del paréntesis. La siguiente operación será la resta dentro de los corchetes, se cambian las fracciones por sus equivalentes con denominador m.c.m.(2, 12) = 12 Se restan las fracciones homogéneas y se multiplica el resultado por el signo que está antes del corchete. Se convierten a fracciones equivalentes dentro del paréntesis, usando m.c.m.(3, 12) = 12 Se suman las fracciones homogéneas y se multiplica por el signo delante de las llaves. Se convierten a fracciones equivalentes, usando m.c.m.(1, 12) = 12. Se restan las fracciones homogéneas.

1.4. OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Ejemplo 8

$$\left[\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6} \right) \cdot 2 \right]^2$$

Operaciones	Explicaciones
$\left[\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6} \right) \cdot 2 \right]^2$ $= \left[\left(\frac{4}{6} - \frac{1}{6} \right) \cdot 2 \right]^2$ $= \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \right]^2$ $= \left[\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 1} \right]^2$ $= [1]^2$ $= 1$	Se efectúa la operación del símbolo de agrupación más interno, en este caso es el paréntesis. Para ello se escriben las fracciones equivalentes con común denominador m.c.m.(3, 6) = 6. Se realiza la suma dentro del paréntesis y se simplifica. Multiplicamos las fracciones dentro de los corchetes. Simplificamos la fracción dentro del corchete. Se eleva al cuadrado el número dentro de los corchetes.

Ejemplo 9

$$\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{4} \right) \div \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \right)$$

Operaciones	Explicaciones
$\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{4} \right) \div \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \right)$ $= \left(\frac{7}{8} - \frac{2}{8} \right) \div \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right)$ $= \frac{5}{8} \div \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right)$ $= \frac{5}{8} \div \left(\frac{2}{4} + \frac{1}{4} \right)$ $= \frac{5}{8} \div \frac{3}{4}$ $= \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{3}$ $= \frac{5}{6}$	Se pueden calcular los dos paréntesis a la vez. El primer paréntesis haciendo común denominador m.c.m.(8, 4) = 8 y en el segundo paréntesis la multiplicación es primero. Se realiza la resta dentro del primer paréntesis y se simplifica dentro del segundo paréntesis. En el paréntesis el común denominador es m.c.m.(2, 4) = 4 Simplificamos la fracción dentro del paréntesis. Cambiamos la segunda fracción por su inverso para hacer una multiplicación. Simplificando.

1.4. OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Ejemplo 10

$$-\frac{1}{5} + \left[\frac{2}{3} - \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) \right] \div \frac{1}{6}$$

Operaciones	Explicaciones
$-\frac{1}{5} + \left[\frac{2}{3} - \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) \right] \div \frac{1}{6}$ $= -\frac{1}{5} + \left[\frac{2}{3} - \left(\frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2} \right) \right] \div \frac{1}{6}$ $= -\frac{1}{5} + \left[\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right] \div \frac{1}{6}$ $= -\frac{1}{5} + 0 \cdot \frac{6}{1}$ $= -\frac{1}{5} + 0$ $= -\frac{1}{5}$	Se empieza con la operación del símbolo de agrupación más interno, el paréntesis. Para ello, multiplicamos las fracciones expresando cada número en factores primos. Simplificamos la fracción dentro del paréntesis y multiplicamos por el signo delante del paréntesis. Restamos las fracciones homogéneas y cambiamos la operación de división por la multiplicación del inverso de $\frac{1}{6}$. Multiplicamos la segunda y tercera fracciones. Por último, sumamos las fracciones.